1，设 Q 是有理数域，x^3-a 是 Q[x]中的不可约元，α是 x^3-a 的一个根，

试证明 $Q(\alpha)$不是 x^3-a 在 Q 上的分裂域，

证明: 因为α是 x^3-a 的一个根，所以 x^3-a 的另外两个根为$\alpha\omega$，$\alpha\omega^2$

若 $Q(\alpha)$是 x^3-a 在 Q 上的分裂域，则$\alpha\omega$，$\alpha\omega^2$ 属于 $Q(\alpha)$，

从而有ω属于 $Q(\alpha)$，于是 $Q(\alpha)$包含 $Q(\omega)$，

因此$|Q(\alpha):Q|=|Q(\alpha):Q(\omega)||Q(\omega):Q|$

因为$|Q(\alpha):Q|=3$，$|Q(\omega):Q|=2$，所以矛盾，故 $Q(\alpha)$不是 x^3-a 在 Q 上的分裂域

2，设α是属于 Q[x]的 $f(x)=x^2+x+1$ 的根

求 f(x)在 Q 上的分裂域及 f(x)在分裂域中的因子分解,

解: 因为 f(x)是二次多项式，因此若α是 f(x)的根，

$-1-\alpha$是 f(x)的另一个根，且 $f(x)=(x-\alpha)(x+1+\alpha)$，

f(x)在 Q 上的分裂域为 $Q(\alpha)$，

3，求多项式 $f(x)=x^3-x^2-x-2$ 在有理数域上的分裂域，

解: 因为 $f(x)=x^3-x^2-x-2=(x^2+x+1)(x-2)=(x-\omega)(x-\overline{\omega})(x-2)$，

所以 f(x)在有理数域上的分裂域为 $Q(\omega, \overline{\omega}, 2)=Q(\omega)$，

4，设 p 是素数，求$x^{p^n}-1$ 在 Z_p 上的分裂域，

解: 因为 $f(x)=x^{p^n}-1=(x-1)^{p^n}$，故 $f(x)=x^{p^n}-1$ 在 Z_p 上的分裂域为 Z_p

5，试证明包含 Q 的扩张 $Q(\sqrt[4]{9})$是正规扩张，

证明: 由于$\sqrt[4]{9}=\sqrt{3}$在 Q 上的极小多项式是 x^2-3，

而 x^2-3 在 Q 上的分裂域为 $Q(\sqrt[4]{9})$，

所以包含 Q 的 $Q(\sqrt[4]{9})$是正规扩张

6，试证明扩张次数为 2 的扩张是正规扩张，

证明： 设$|E:F|=2$，取属于 $E-F$ 的α，

则由$|E:F|=|E:F(\alpha)||F(\alpha):F|$，知$|F(\alpha):F|=2$，$|E:F(\alpha)|=1$，$E=F(\alpha)$，

设α在 F 上的极小多项式为 x^2+ax+b，则 x^2+ax+b 的根为α，$\beta=-a-\alpha$，

x^2+ax+b 在 F 上的分裂域为 $F(\alpha,\beta)=F(\alpha)$，

所以包含 F 的 E 是正规扩张，

7，试证明 $Q(\sqrt[3]{5})$不是 Q 的正规扩张，

证明： $Q[x]$中不可约元 $f(x)=x^3-5$ 的根为$\sqrt[3]{5}$，$\omega\sqrt[3]{5}$，$\omega^2\sqrt[3]{5}$，其中$\omega=\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$

显然$\omega\sqrt[3]{5}$，$\omega^2\sqrt[3]{5}$不属于 $Q(\sqrt[3]{5})$，故 $Q(\sqrt[3]{5})$不是 Q 上的正规扩张，

8，求属于 $Z_2[x]$的多项式 $f(x)=x+1$ 在 Z_2 上的分裂域，

解： 因为 $f(x)=(x-1)(x^2+x+1)$，且 x^2+x+1 是 Z_2 上的不可约多项式，

所以 $f(x)$在 Z_2 上的分裂域为 $Z_2(\alpha)$，其中α是 x^2+x+1 的一个根，

习题 1 设 F 为域，E 是 $F[x]$中 n 次多项式 $f(x)$在 F 上的分裂域，求证$|E:F|\,\big|\,n!$

证明： 对 n 用数学归纳法，显然，$n=1$ 时结论成立，

假设结论对 $n-1$ 次多项式成立，

设 $f(x)=a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$，其中 a 属于 F，$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\cdots$，$\alpha_n$属于 E

令 $f_{n-1}(x)=a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_{n-1})$，则 $f_{n-1}(x)$是 $F(\alpha_n)$上多项式

且在 $F(\alpha_n)$上的分裂域为 $F(\alpha_n)(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1})=E$

由归纳假设知$|E:F(\alpha_n)|\,\big|\,(n-1)!$

由α_n是 $F[x]$中 n 次多项式 $f(x)$的根可知$|F(\alpha_n):F|\,\big|\,n!$

因此，$|E:F|=|E:F(\alpha_n)||F(\alpha_n):F|\,\big|\,n!$

习题 2 求 $f(x)=x^3-2$ 在有理数域上的分裂域 E，并求$|E:Q|$，

解: 因为 $f(x)=(x-\sqrt[3]{2})(x-\sqrt[3]{2}\omega)(x-\sqrt[3]{2}\overline{\omega})$

所以 f(x)在有理数域上的分裂域为 $Q(\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{2}\omega,\sqrt[3]{2}\overline{\omega})=Q(\sqrt[3]{2},\sqrt{3}i)$，

扩张次数为$|Q(\sqrt[3]{2},\sqrt{3}i):Q|=|Q(\sqrt[3]{2},\sqrt{3}i):Q(\sqrt[3]{2})||Q(\sqrt[3]{2}):Q|=6$，

习题 3 求 $f(x)=x^4-10x^2+1$ 在有理数域上的分裂域 E，并求$|E:Q|$，

解: 因为 $f(x)=(x^4-2x^2+1)-8x^2=(x^2-2\sqrt{2}x-1)(x^2+2\sqrt{2}x-1)$

$=(x-\sqrt{2}-3)(x-\sqrt{2}+3)(x+\sqrt{2}-3)(x+\sqrt{2}+3)$，

所以 f(x)在 Q 上的分裂域为 $Q(\sqrt{2}\pm\sqrt{3})=Q(\sqrt{2},\sqrt{3})=Q(\sqrt{2}+\sqrt{3})$，$|E:Q|=4$，

习题 4 求 $f(x)=x^5+x^3-2x^2-2$ 在有理数域上的分裂域 E，并求$|E:Q|$，

解: 因为 $f(x)=(x-i)(x+i)(x-\sqrt[3]{2})(x-\sqrt[3]{2}\omega)(x-\sqrt[3]{2}\overline{\omega})$

所以 f(x)在有理数域上的分裂域为 $Q(i,\sqrt{3},\sqrt[3]{2})$，$|E:Q|=12$，

习题 5 将 Z_2 上多项式 $f(x)=x^3+x+1$ 表示成分裂域上一次因式的乘积的形式，

解: 易知 f(x)是 $Z_2[x]$中不可约多项式，f(x)在 $Z_2[x]/\langle f(x)\rangle$中有根$\overline{x}$

而 $Z_2(\overline{x})\cong Z_2[x]/\langle f(x)\rangle$，$Z_2(\overline{x})=|a\overline{x}^2+b\overline{x}+c|a,b,c\in Z_2|$，

容易验证$\overline{x}^2$，$\overline{x}^2+\overline{x}$是 f(x)的根，所以分裂域为 $Z_2(\overline{x})$，$f(x)=(x-\overline{x})(x-\overline{x}^2)(x-\overline{x}^2-\overline{x})$

习题 6 设 $f(x)=x^{p^n}-x$ 在 Z_p 上的分裂域为 E，证明$|E|=p^n$，并求$|E:Z_p|$，

证明: 设 F 是 f(x)在 E 中所有根的集合，则对属于 F 的任意 a，b，

我们有$(a-b)^{p^n}=a^{p^n}-b^{p^n}=a-b$，$(ab^{-1})^{p^n}=a^{p^n}(b^{p^n})^{-1}=ab^{-1}$

即 $a-b$，ab^{-1} 属于 F，因而 F 是 E 的子域，

又因为 f(x)无重根($f'(x)=-1$)，所以 F 的阶为 p^n

若 c 属于 Z_p，则 $c=c^p$，从而 $c=c^{p^n}$，即 c 属于 F

从而 $E=Z_p(F)\subseteq F\subseteq E$，即 E=F，易知，$|E:Z_p|=n$

习题 7 求 $f(x)=x^6+\overline{2}x^3+\overline{2}$在 Z_3 上的分裂域 E，并求$|E:Z_3|$，

解: 因为 $f(x)=x^6+\overline{2}x^3+\overline{2}=(x^2+\overline{2}x+\overline{2})^3$，而 $x^2+\overline{2}x+\overline{2}$在 Z_3 上不可约，

所以 f(x)在 Z_3 上的分裂域为 $Z_3(\alpha)$，其中α是 $x^2+\overline{2}x+\overline{2}$的一个根，

易知$|Z_3(\alpha):Z_3|=2$，

习题 8 设 F 是域，E 是属于 F[x]的多项式 f(x)在 F 上的分裂域，
K 是包含 F 的 E 的中间域，试证明 E 是 f(x)在 K 上的分裂域，
证明: 设 f(x)在 E 中的根为$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$则 $E=F(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，
从而 f(x)在 K 上的分裂域为 $K(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，而 $E\supseteq K(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\supseteq F(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=E$
所以 E 是 f(x)在上的分裂域，

习题 9 证明 $Q(\sqrt[4]{2})$不是 Q 的正规扩张，

证明: Q[x]中不可约元 $f(x)=x^4-2$ 的根为$\sqrt[4]{2}$，$-\sqrt[4]{2}$，$i\sqrt[4]{2}$，$-i\sqrt[4]{2}$

由于 $Q(\sqrt[4]{2})$包含于 R，但是 $i\sqrt[4]{2}$不属于 R，故 $Q(\sqrt[4]{2})$不是 Q 的正规扩张，