1，试求$|C:R|$和$|C:C|$，

解: 因为$\{1,i\}$为 C 在 R 上的一组基，所以$|C:R|=2$，

而 1 是 C 在 C 上的一组基，故$|C:C|=1$，

2，求$|Q(1+i):Q|$，

解: 因为 $1+i$ 在 Q 上的极小多项式为 $f(x)=[x-(1+i)][x-(1-i)]=x^2-2x+2$，

所以$|Q(1+i):Q|=2$，

3，设α是 $Q[x]$中多项式 $f(x)=x^2-5x+7$ 的根，

试分别将$\alpha^4-\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1$ 和$\frac{1-7\alpha+2\alpha^2}{1+\alpha-\alpha^2}$用包含 Q 的扩张 $Q(\alpha)$的一组基底表示出来

解: 由于 $f(x)=x^2-5x+7$ 是不可约多项式，所以 $f(x)$是α在 Q 上的极小多项式，

因此，$1,\alpha$是包含 Q 的扩张 $Q(\alpha)$的一组基底，

令 $g(x)=x^4-x^3+x^2+x+1$，则 $g(x)=f(x)(x^2+4x+14)+43x-97$，$g(\alpha)=43\alpha-97$，

令 $h(x)=-x^2+x+1$，则 $1=\frac{x-3}{4}h(x)+\frac{1+x}{4}f(x)$，$1=\frac{\alpha}{4}h(\alpha)$

$\frac{1-7\alpha+2\alpha^2}{1+\alpha-\alpha^2}=\frac{1}{4}(\alpha-3)(1-7\alpha+2\alpha^2)=\frac{1}{4}(2\alpha^3-13\alpha^2+22\alpha-3)$

令 $t(x)=\frac{1}{4}(2x^3-13x^2+22x-3)$，则 $t(x)=f(x)\frac{2x-3}{4}+\frac{-7x+18}{4}$，故 $t(\alpha)=\frac{18-7\alpha}{4}$

4，试求 $Q(\sqrt[3]{2})$中元素$-1+\sqrt[3]{2}$的逆元，

解法 1: 由于$\sqrt[3]{2}$在 Q 上的极小多项式为 $f(x)=x^3-2$

因此 $Q(\sqrt[3]{2})$在 Q 上的一组基底为 1，$\sqrt[3]{2}$，$(\sqrt[3]{2})^2$

令$\alpha=\sqrt[3]{2}$，$g(x)=x-1$，则 $f(\alpha)=0$

又因 $f(x)$为 Q 上的不可约多项式，且 $g(\alpha)$不为 0，从而$(f(x),g(x))=1$

用辗转相除法求得$-f(x)+(x^2+x+1)g(x)=1$，因此$(\alpha^2+\alpha x+1)g(\alpha)=1$

即 $g(\alpha)$的逆元为$\alpha^3+\alpha+1$，故$-1+\sqrt[3]{2}$的逆元为 $1+\sqrt[3]{2}+(\sqrt[3]{2})^2$

解法 2: $-1+\sqrt[3]{2}$的逆元为$(-1+\sqrt[3]{2})^{-1}=\frac{(\sqrt[3]{2})^3-1}{-1+\sqrt[3]{2}}=(\sqrt[3]{2})^2+\sqrt[3]{2}+1$

5，求包含 Z_7 的扩张 $Z_7(\sqrt[3]{2})$的一组基底

解: $\alpha=\sqrt[3]{2}$是属于 $Z_7[x]$的多项式 $f(x)=x^3-\overline{2}$的一个根，

由于 $f(\overline{0})=\overline{5}\neq\overline{0}$，$f(\overline{1})=f(\overline{2})=f(\overline{4})=\overline{6}\neq\overline{0}$，$f(\overline{3})=f(\overline{5})=f(\overline{6})=\overline{4}\neq\overline{0}$

所以 $f(x)$是$\alpha=\sqrt[3]{2}$在 Z_7 上的极小多项式，

故 1，α，α^2 是包含 Z_7 的 $Z_7(\sqrt[3]{2})$的一组基

6，试判断 $Q\left(\frac{2i+1}{i-1}\right)$与 $Q(i)$是否同构，

解: 由于$\alpha=\frac{2i+1}{i-1}=\frac{1-3i}{2}$，$\left(x-\frac{1-3i}{2}\right)\left(x-\frac{1+3i}{2}\right)=x^2-x+\frac{5}{2}\in Q[x]$

所以 $Q(\alpha)=\{a+b\alpha|a,b\in Q\}$，

由于$(x-i)(x+i)=x^2+1$，所以 $Q(i)=\{a+bi \mid a,b\in Q\}$，

可知映射$\varphi: Q(\alpha)\to Q(i)$，$a+b\alpha\to a+bi$ 是同构映射，

因此，$Q\left(\frac{2i+1}{i-1}\right)$与 $Q(i)$同构，

7，设包含 F 的 E 为域的扩张，

试证明若属于 E 的α是 F 上的 p(p 是奇数)次代数元，则 $F(\alpha)=F(\alpha^2)$，

证明: α是 F 上的代数元，则α^2 也是 F 上的代数元，

从而包含 F 的 $F(\alpha^2)$是有限扩张，

属于 $F(\alpha^2)[x]$的α是多项式 $x^2-\alpha^2$ 的根，则$|F(\alpha^2)(\alpha):F(\alpha^2)|=1$ 或者 2，

显然有 $F(\alpha^2)(\alpha)=F(\alpha)$，因此$|F(\alpha):F|=|F(\alpha):F(\alpha^2)||F(\alpha^2):F|$，

由已知条件得$|F(\alpha):F(\alpha^2)|=1$，即 $F(\alpha)=F(\alpha^2)$，

8，设包含 F 的 E 为域的扩张，

试证明若对属于 E 的α，有 $F[\alpha]=\{f(\alpha)|f(x)\in F[x]\}$是域，

则包含 F 的 $F(\alpha)$是单代数扩张，

证明: 因为 $F[\alpha]$是域，取 $f(\alpha)$属于 $F[\alpha]$，$f(\alpha)$不为 0，

则存在属于 $F[\alpha]$的 $g(\alpha)$，使得 $f(\alpha)g(\alpha)=1$，即多项式 $f(x)g(x)-1$ 以α为根

因此包含 F 的 $F(\alpha)$是单代数扩张，

9，设域 F 的未定元为 x，$\alpha=\frac{x^3}{x+1}$

试证明包含 F(α)的 F(x)是单代数扩张，并求扩张次数，

证明: 因为$\alpha=\frac{x^3}{x+1}$，所以 $x^3-\alpha x-\alpha=0$，x 是该方程的一个根，

从而 x 是 F(α)上的代数元，

包含 F(α)的 F(x)=F(x)(α)=F(α)(x)是单代数扩张，

设 F(α)上多项式 $f(y)=y^3-\alpha y-\alpha$，易知 f(y)是不可约多项式，

因此 f(y)是 x 的极小多项式，包含 F(α)的 F(x)的扩张次数为 3，

习题 1 分别求有理数域 Q 上线性空间 $Q(\sqrt{2})$，$Q(\sqrt[3]{2})$和 $Q\left(\frac{2i+1}{i+1}\right)$的一组基

解: 易知 x^2-2，x^3-2 分别是$\sqrt{2}$，$\sqrt[3]{2}$的极小多项式，

因此 1，$\sqrt{2}$是 $Q(\sqrt{2})$在 Q 上的基，1，$\sqrt[3]{2}$，$\sqrt[3]{4}$是 $Q(\sqrt[3]{2})$在 Q 上的基，

因为$\frac{2i+1}{i+1}=\frac{i+3}{2}$在 Q 上的极小多项式为$\left(x-\frac{i+3}{2}\right)\left(x+\frac{i-3}{2}\right)=x^2-3x+\frac{5}{2}$

因此 1，$\frac{2i+1}{i+1}$是在 $Q\left(\frac{2i+1}{i+1}\right)$上的基，

习题 2 设域 K 是 F 的扩域，α，β属于 K，

若α是 F 上的代数元，试证明α是 F(β)上的代数元，且$|F(\alpha,\beta):F(\beta)|\leqslant|F(\alpha):F|$

证明: 因为α是 F 上的代数元，所以存在 F 上不可约多项式 f(x)且以α为根，

f(x)也是 F(β)上多项式且以α为根，因此结论成立

习题 3 设有包含 F 的域扩张 K , u , v 属于 K，若 u , v 均为 F 上的代数元 ，

试证明当且仅当 u , v 在 F 上的极小多项式相同时 ，

存在域同构σ: F(u)≅F(v)使得$\sigma(u)=v$, $\sigma|_F=id$,

证明: 若 u , v 在 F 上的极小多项式均为 f(x) ,

设 deg f(x)=n，则 $1 , u , \cdots , u^{n-1}$ 是 F(u)的基 ，$1 , v , \cdots , v^{n-1}$ 是 F(v)的基 ，

因此σ: $F(u) \to F(v)$, $\sum_{i=0}^{n-1} a_i u^i \to \sum_{i=0}^{n-1} a_i v^i$ 是 F(u)到 F(v)的同构映射,

且$\sigma(u)=v$, $\sigma|_F=id$,

反之 ，设存在域同构σ: F(u)≅F(v)使得$\sigma(u)=v$, $\sigma|_F=id$,

并设 f(x)是 u 在 F 上的极小多项式 ，

由 $0=f(u)$和 $0=\sigma(f(u))=f(\sigma(u))=f(v)$，从而 v 在 F 上的极小多项式也是 f(x) ,

习题 4 设α是多项式 $f(x)=x^3-3x-1$ 的根 ，求包含 Q 的扩张 Q(α)的扩张次数 ，

解: 因为 $f(x)=x^3-3x-1$ 是有理数域上不可约多项式 ，

所以 $f(x)=x^3-3x-1$ 是α在 Q 上的极小多项式 ，

从而包含 Q 的 Q(α)的扩张次数为 3 ,

习题 5 求 $Q[\sqrt{2}]=\{a+b\sqrt{2} \mid a , b \in Q\}$的全部子域

解: 设 K 是 $Q[\sqrt{2}]$的子域 ，则 1 属于 K，从而 $Q \subseteq K \subseteq Q[\sqrt{2}]$,

因为$|Q[\sqrt{2}]: Q|=2$，所以$|K: Q|=1$ 或 2，从而 K 为 Q 或 $Q[\sqrt{2}]$,

习题 6 设α是 Q 上不可约多项式 $g(x)=x^2-x+2$ 的根，

试求 $Q(\alpha)$中非零元素 $1+\alpha-\alpha^2$ 的逆元，

并将$\frac{1+4\alpha-5\alpha^2}{1+\alpha-\alpha^2}$ 表示成 1，α的 Q 线性组合的形式

解: 由 $g(x)$不可约知 $g(x)$与 $f(x)=1+x-x^2$ 互素或 $g(x)$整除 $f(x)$，

而α是 $g(x)$的根，不是 $f(x)$的根，因此 $g(x)$与 $f(x)$互素，

那么存在属于 $Q[x]$的 $u(x)$，$v(x)$，使得 $g(x)u(x)+f(x)v(x)=1$，

由 $g(\alpha)=0$ 得 $f(\alpha)v(\alpha)=1$，即 $v(\alpha)$是 $f(\alpha)$的逆元，

由带余除法知 $v(x)=\frac{1}{22}(x+4)$，所以 $v(\alpha)=\frac{1}{22}(\alpha+4)$，

再由 $g(\alpha)=0$ 推得$\frac{1+4\alpha-5\alpha^2}{1+\alpha-\alpha^2}=\frac{1}{22}(\alpha+4)(1+4\alpha-5\alpha^2)=\frac{1}{11}(3\alpha+23)$

习题 7 证明 $f(x)=x^2+1$ 和 $g(x)=x^2-x-1$ 都在 $Z_3[x]$中不可约，

若 $f(\alpha)=g(\beta)=0$，证明 $Z_3(\alpha)$与 $Z_3(\beta)$同构，

证明: $Z_3[x]$中的二次多项式如果可约，则必有一次因子，

将 $x=\overline{0}$，$\overline{1}$，$\overline{2}$代入 $f(x)$和 $g(x)$都不等于 0，

所以 $f(x)$和 $g(x)$在 $Z_3[x]$中不可约，

由于 $f(\beta+1)=0$，即α和$\beta+1$ 在 Z_3 上的极小多项式相同，

故$\alpha\to\beta+1$ 给出 $Z_3(\alpha)$到 $Z_3(\beta)$的一个同构映射，