1，证明属于 C 的$\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{-2}}{2}$ 是实数域 R 上的 2 次代数元 ，

是有理数域 Q 上的 4 次代数元 ，

证明: 令 $f(x)=\left[x-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{-2}}{2}\right)\right]\left[x-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{-2}}{2}\right)\right]=x^2-\sqrt{2}x+1$，

则 f(x)是 R 上以α为根的次数最低的多项式，故α是实数域 R 上的 2 次代数元

又因$\alpha-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{-2}}{2}$，则$\left(\alpha-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{-2}}{2}\right)^2$，即$\alpha^2-\sqrt{2}\alpha+1=0$，

因此$\alpha^2+1=\sqrt{2}\alpha$，$(\alpha^2+1)^2=2\alpha^2$，即$\alpha^4+1=0$，从而$\alpha$是 $g(x)=x^4+1$ 的根 ，

而 g(x)是有理数域上的不可约多项式，故 g(x)是α在 Q 上的极小多项式 ，

从而α是 Q 上的 4 次代数元 ，

2，设α是域 F 上的超越元 ，证明$\alpha+1$ 也是域 F 上的超越元 ，

证明: 假设$\alpha+1$ 是域 F 上的代数元 ，

则存在 F 上的多项式 $f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$，使得 $f(\alpha+1)=\sum_{i=0}^{n}a_i(\alpha+1)^i=\sum_{i=0}^{n}b_i\alpha^i=0$

令 $g(x)=\sum_{i=0}^{n}b_ix^i$，则 g(x)属于 F[x]，$g(\alpha)=0$，即$\alpha$是域 F 上的代数元

这与α是域 F 上的超越元矛盾 ，

3，设α是域 F 上的超越元 ，证明α^2 也是 F 上的超越元 ，

证明: 若α^2是域 F 上的代数元，则存在域 F 上的多项式 $f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_i\,x^i$

使得 $f(\alpha^2)=\sum_{i=0}^{n}a_i\,(\alpha^2)^i=\sum_{i=0}^{n}a_i\,\alpha^{2i}=0$，这与$\alpha$是域 F 的超越元矛盾

4，求$\sqrt{2}+i$在有理数域上的极小多项式，

解: 因为$[x-(\sqrt{2}+i)][x-(\sqrt{2}-i)]=x^2-2\sqrt{2}x+3$

$(x^2-2\sqrt{2}x+3)(x^2+2\sqrt{2}x+3)=x^4-2x^2+9$

故$\sqrt{2}+i$是x^4-2x^2+9的根，

而x^4-2x^2+9的四个根为$\pm(\sqrt{2}\pm i)$，

由此可知x^4-2x^2+9是有理数域上的不可约多项式，

从而是$\sqrt{2}+i$的极小多项式，

5，求$\frac{2i+1}{i-1}$在有理数域上的极小多项式，

解: $\frac{2i+1}{i-1}=\frac{1-3i}{2}$，$f(x)=\left(x-\frac{1-3i}{2}\right)\left(x-\frac{1+3i}{2}\right)=x^2-x+\frac{5}{2}$

又因$f(x)$属于$Q[x]$，故$f(x)=x^2-x+\dfrac{5}{2}$

即为$\frac{2i+1}{i-1}$在有理数域上的极小多项式，

6，证明$M_2(Z_5)=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in Z_5\right\}$是$Z_5$上的向量空间

证明: 如果$\forall r_1, r_2 \in Z_5$，$u=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$，$v=\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \in M_2(Z_5)$，则有

(1)

$$r_1(u+v)=r_1\left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} r_1(a_1+a_2) & r_1(b_1+b_2) \\ r_1(c_1+c_2) & r_1(d_1+d_2) \end{pmatrix}=r_1u+r_1v$$

(2) $(r_1+r_2)u=r_1u+r_2u$，

(3) $(r_1r_2)u=r_1(r_2u)$，

(4) $\bar{1}u=u$，

故$M_2(Z_5)$是Z_5上的向量空间，

7，求$\begin{pmatrix}\overline{2} & \overline{1}\\ \overline{0} & \overline{2}\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}\overline{1} & \overline{2}\\ \overline{3} & \overline{4}\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}\overline{2} & \overline{3}\\ \overline{4} & \overline{1}\end{pmatrix}$生成的 $M_2(Z_5)$的子空间 V 的基底和维数

解: 若存在属于 Z_5 的 k_1，k_2，k_3，使得$k_1\begin{pmatrix}\overline{2} & \overline{1}\\ \overline{0} & \overline{2}\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}\overline{1} & \overline{2}\\ \overline{3} & \overline{4}\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}\overline{2} & \overline{3}\\ \overline{4} & \overline{1}\end{pmatrix}=0$，

即得方程组$\begin{cases}2k_1+k_2+2k_3\equiv 0\\ k_1+2k_2+3k_3\equiv 0\\ 3k_2+4k_3\equiv 0\\ 2k_1+4k_2+k_3\equiv 0\end{cases}$

方程组有非零解 $k_1=\overline{1}$，$k_2=\overline{4}$，$k_3=\overline{2}$，三向量线性相关，

由于$\begin{pmatrix}\overline{2} & \overline{1}\\ 0 & \overline{2}\end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix}\overline{1} & \overline{2}\\ \overline{3} & \overline{4}\end{pmatrix}$线性无关，故 dim V=2，基底为$\begin{pmatrix}\overline{2} & \overline{1}\\ 0 & \overline{2}\end{pmatrix}$,$\begin{pmatrix}\overline{1} & \overline{2}\\ \overline{3} & \overline{4}\end{pmatrix}$

8，设 F 是含有 p 个元素的有限域，试证明 F 上的 n 维向量空间 V 是有限集合

证明: 由题意知$|V:F|=n$，

设α_1，⋯，α_n 是 V 的基底，则$\alpha=k_1\alpha_1+\cdots+k_n\alpha_n$，属于 F 的 k_i 的取法共有 p^n 个

故$|V|=p^n$，即 V 是有限集合，

9，设 F 是有限域，证明 F 的阶是素数的幂，

证明: 设 F 的特征为素数 p，则 F 是 Z_p 上的向量空间，由题 8 得证，

10，设 F 是有限域，试证明 F 上的任意 n(n＞l)维向量空间 V

都可以表示成 V 的有限个真子空间的并

证明: 因为 F 是有限域，由题 8 知 F 上 n 维向量空间 V 是有限集合，

不妨设 $V=\{v_1,\cdots,v_n\}$，令 $V_i=Fv_i$，i=1，2，⋯，s，即子空间 V_i 是由向量 v_i 生成的

从而有 $V=\bigcup_{i=1}^{s}V_i$，即 V 可以表示成有限个真子空间的并

11，设 $F=Z_2$，F^3 是 F 上三元列向量的集合，试证明 F^3 是域 F 上的向量空间，并将 F^3 表示成它的 3 个真子空间的并，

证明: 因为 F^3 是域 F 上的向量空间，$|F^3|=8$，

$F^3=\{(\bar{0},\bar{0},\bar{0}),(\bar{1},\bar{0},\bar{0}),(\bar{0},\bar{1},\bar{0}),(\bar{0},\bar{0},\bar{1}),(\bar{1},\bar{1},\bar{0}),$

$(\bar{1},\bar{0},\bar{1}),(\bar{0},\bar{1},\bar{1}),(\bar{1},\bar{1},\bar{1})\}$

$U_1=\{(\bar{0},\bar{0},\bar{0}),(\bar{1},\bar{0},\bar{0}),(\bar{0},\bar{1},\bar{1}),(\bar{1},\bar{1},\bar{1})\}$，

$U_2=\{(\bar{0},\bar{0},\bar{0}),(\bar{0},\bar{1},\bar{0}),(\bar{1},\bar{0},\bar{1}),(\bar{1},\bar{1},\bar{1})\}$，

$U_3=\{(\bar{0},\bar{0},\bar{0}),(\bar{0},\bar{0},\bar{1}),(\bar{1},\bar{1},\bar{0}),(\bar{1},\bar{1},\bar{1})\}$，

$F^3=U_1\cup U_2\cup U_3$，

习题 1 设 E 和 F 都是域 K 的子域，

试证明当且仅当 E 和 F 之间有包含关系时，$E\cup F$ 是域

证明: 只证必要性，

假若 E 和 F 互不包含，取α属于 $E-F$，β属于 $F-E$

则$\alpha+\beta$不属于 $E\cup F$，矛盾，

习题 2 求下列元素在 Q 上的极小多项式:

(1)$a+bi$，其中 a，b 属于 Q，$b\neq 0$

(2)$\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}$

解: (1)因为 $a+bi$ 不属于 Q

且 $a+bi$ 是多项式$(x-a-bi)(x-a+bi)=x^2-2ax+a^2+b^2$ 的根

因此 $x^2-2ax+a^2+b^2$ 是 $a+bi$ 在 Q 上的极小多项式

(2)令$\alpha=\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}$，则$\alpha^3=1+\sqrt{2}$

从而$(\alpha^3-1)^2=2$，$\alpha^6-2\alpha^3-1=0$，即α是多项式 x^6-2x^3-1 的根

验证可知±1 不是 x^6-2x^3-1 的根

因此 x^6-2x^3-1 是 Q 上的不可约多项式，从而是$\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}$的极小多项式

习题 3 证明有理数域上的两个扩张 $Q(\sqrt{3})$与 $Q(i)$是线性空间同构而不是域同构，

证明: 由于两个扩张 $Q(\sqrt{3})$与 $Q(i)$作为域 Q 上的线性空间都是 2 维的，

因此作为线性空间二者是同构的

若二者作为域同构，则存在 $Q(i)$到 $Q(\sqrt{3})$的同构映射 f

使得 $f(i^2)=f(-1)=-f(1)=-1$

因此 $f(i)=i$，这与 i 不属于 $Q(\sqrt{3})$矛盾，故二者作为域不同构

习题 4 求包含 Q 的扩张 $Q(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})$的扩张次数

解法 1: 显然有 $Q(\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{4})$包含 $Q(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})$

由$(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})^{-1}$属于 $Q(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})$可以推得$(2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})$属于 $Q(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})$

从而$\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{4}$属于 $Q(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})$，故 $Q(\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{4})=Q(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})$，

而$|Q(\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{4}):Q|=|Q(\sqrt[3]{2}):Q|=3$，所以包含 Q 的扩张 $Q(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})$的扩张次数为 3

解法 2: $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$的极小多项式为 x^3-6x-6

因此包含 Q 的扩张 $Q(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})$的扩张次数为 3