1，试判断能否用尺规三等分 45°，75°，90°角

解: 因为 $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 能用尺规作出 ，所以能用尺规三等分 90°角 ，

令 $z=\sin 15°$，因为 $\sin 30° = \frac{1}{2} = 2\sin 15°\cos 15°$，两边平方得 $16z^4-16z^2+1=0$，

45°角由点 0，1 和 $1+\sqrt{-1}$决定

因此将 45°角三等分问题归结为求 $F=Q(\sqrt{-1})$的包含 z 的二次根式扩张链 ，

z 是 $16z^4-16z^2+1=0$ 的根 ，而 $16z^4-16z^2+1=0$ 的根为$\frac{\pm\sqrt{2}\pm\sqrt{6}}{4}$

那么 $F\subseteq F(\sqrt{2})\subseteq F(\sqrt{2}, \sqrt{6})$是 F 的包含 z 的二次根式扩张链 ，

即 45°角可以三等分

2，证明正 7 边形不能用尺规作出 ，

证明: 若能 ，则可作出$\frac{2\pi}{7}$角 ，故可作出 $\sin\frac{2\pi}{7}$ ，

从而 $\sin\frac{2\pi}{7}$是 Q 上次数为 2 的幂的代数元 ，

但是 $\sin\frac{2\pi}{7}$满足方程 $64x^6-112x^4+56x^2+7=0$，取 $p=7$，

由艾森斯坦判别法知 ，此多项式在 Q 上不可约 ，

所以 $\sin\frac{2\pi}{7}$是 Q 上次数为 6 的代数元 ，矛盾 ，

习题 1 角α可以三等分的充分必要条件是多项式 $4x^3-3x-\cos\alpha$在 $Q(\cos\alpha)$上可约

证明: 由已知的α可以做出 $\cos\alpha$，

设$\theta = \frac{\alpha}{3}$ ，由公式 $\cos\alpha=\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$

可知 $\cos\theta$是多项式 $f(x)=4x^3-3x-\cos\alpha$的根 ，

必要性 ，

若可以三等分 ，即θ和 $\cos\theta$可以做出 ，

令 $F=Q(\cos\alpha)$，则$|F(\cos\theta):F|=2^n\leqslant 3$，所以$|F(\cos\theta):F|\leqslant 2$，故 f(x)在 F 上可约

充分性 ，

若 f(x)在 F 上可约 ，则 $\cos\theta$是 F 上的一个次数小于等于 2 的多项式的根

故有$|F(\cos\theta):F|\leqslant 2$，因此 $\cos\theta$可以做出 ，

习题 2 证明 72°角可以三等分，

证明: 因为 $\cos 72° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$，且多项式 $4x^3-3x-\frac{\sqrt{5}-1}{4}$在 $Q(\cos 72°)$内有根$\frac{-\sqrt{5}-1}{4}$

所以 $4x^3-3x-\frac{\sqrt{5}-1}{4}$在 $Q(\cos 72°)$上可约，72°角可以三等分，

习题 3 设 p 为素数，

试证明若正 p 边形可以用尺规做出，则 p 必须是形如 2^t+1 的数

证明: 设 $z=\cos\frac{2\pi}{p}+i\sin\frac{2\pi}{p}$，若正 p 边形可以用尺规做出，即 z 可以做出，

z 是一个本原 p 次单位根，即 $z^p=1$，

由 $x^p-1=(x-1)(x^{p-1}+x^{p-2}+\cdots+x+1)$可知

z 是 Q 上的多项式$\varphi(x)=x^{p-1}+x^{p-2}+\cdots+x+1$ 的根，

易知$\varphi(x)$在 Q 上是不可约的，所以 z 在 Q 上的次数等于 $p-1$，

因此若 z 可用尺规做出则 $p-1=2^t$，即 $p=2^t+1$，

习题 4 正 7 边形、正 11 边形、正 13 边形都不能用尺规做出，

解: 由上题可知，