

所谓尺规作图是指在平面上用无刻度的直尺和圆规
利用已知的图形(如点、直线和圆等)作出未知的图形，
由于作图工具的限制，导致有些图不能用尺规作出，
本节利用伽罗瓦理论给出可以用尺规作出的几何图形的一个充分必要条件，
从而解决历史上著名的三个不能尺规作图的问题:

(1)任意角三等分，(2)化圆为方，(3)倍立方，

由于任何一个几何图形都是由一些点确定的，
例如，直线是由其上的两点确定的、圆是由圆心和圆周上的任意一点确定的、
角是由顶点和其两边上的任意两点确定的，等等，
所以，平面上给定的有限个几何图形，可以视为是已知的有限个点，
而求作的图形不外乎也是平面上的有限个点，

于是，一个尺规作图问题就可以归结成

从平面上已知的有限个点，用直尺和圆规作出适合某些条件的点，

令 $S_0 = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$, $n \geq 2$ 是平面上已知的有限个点组成的集合，

若用直尺连接 S_0 中的任意两点，则得到一条直线，

若以 S_0 中的任意一点为圆心，以其中任意两点之间的距离为半径，

则得到一个圆周，

然后，把这些直线与直线、直线与圆周、圆周与圆周的交点添加到 S_0 之中，

则我们得到一个新的有限个点组成的集合 S_1

重复构造 S_1 的过程，得到由有限个点组成的集合 $S_2 \dots$

继续这个过程，我们能够得到由有限个点组成的集合 S_i 的链

$$S_0 \subseteq S_1 \subseteq S_2 \subseteq \dots \subseteq S_i \subseteq \dots$$

$$\text{如果令 } C(p_1, p_2, \dots, p_n) = \bigcup_{i=0}^{\infty} S_i$$

则平面上的点 p 是由尺规用 $S_0 = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ 中的点作出的充分必要条件是

$$p \text{ 属于 } C(p_1, p_2, \dots, p_n) = \bigcup_{i=0}^{\infty} S_i$$

特别地，我们称 S_1 中的点可用尺规直接从 S_0 作出，

为了给出点 p 可作的条件，我们引入平面的直角坐标系，

以点 p_1 为坐标原点，以点 p_2 为 x 轴上的单位点，即 $p_1=(0,0)$, $p_2=(1,0)$,

这样点集合 $S_0=\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ 与 $C\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ 中的所有点

就都确定了各自的坐标

另外，平面上的点与复数域 C 之间存在着自然的一一对应: $(x, y) \leftrightarrow x + \sqrt{-1}y$

所以，点集合 $S_0=\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$

对应着一个复数集合: $\{p_1, p_2, \dots, p_n\} \leftrightarrow \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$,

其中的复数 z_i 由点 p_i 的坐标唯一确定，特别地， $z_1=0$, $z_2=1$,

我们把点集合 $C(p_1, p_2, \dots, p_n)$ 对应的复数集合记为 $C(z_1, z_2, \dots, z_n)$,

则对于平面上的任意一点 p ，如果 p 点对应的复数为 z ,

则 p 属于 $C(p_1, p_2, \dots, p_n) \Leftrightarrow z$ 属于 $C(z_1, z_2, \dots, z_n)$,

这样，点 p 的尺规作图问题就归结成了确定 z 属于 $C(z_1, z_2, \dots, z_n)$ 的问题，

引理 9.1 已知实数 $1, a, b$,

则用直尺和圆规可以作出图形 $a \pm b, ab, \frac{a}{b}$ 和 $\sqrt{a} (a > 0)$

证: 不妨假定 $a > 0, b > 0$,

(1) 在一直线上取 E, F, U 三点, 使得 $EF = a, FU = b$ 则 $EU = a + b$, 如图 4.1,

(2) 在一直线上取 E, F, U 三点, 使得 $EF = a, UF = b$, 则 $EU = a - b$, 如图 4.2,

(3) 过点 P 作直线 l_1, l_2 , 在 l_1 上取点 E, F , 使得 $PE = 1, PF = a$,

在 l_2 上取点 U , 使得 $PU = b$, 连接 EU , 过 F 作 EU 的平行线, 交 l_2 于 V ,

则 $PV = ab$, 如图 4.3,

(4) 过点 P 作直线 l_1, l_2 , 在 l_1 上取点 E, F , 使得 $PE = 1, PF = b$,

在 l_2 上取点 V , 使得 $PV = a$, 连接 FV , 过 E 作 FV 的平行线, 交 l_2 于 U ,

则 $PU = \frac{a}{b}$, 如图 4.3,

(5) 在一直线 l 上取 E, U, F 三点, 使得 $EU = 1, UF = a$, 以 EF 的中点 O 为圆心,

以 $\frac{1}{2}(1+a)$ 为半径画弧交过 U 的 l 的垂线于 V , 则 $UV = \sqrt{a}$, 如图 4.4,

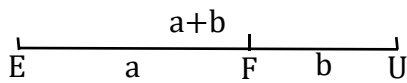


图 4.1

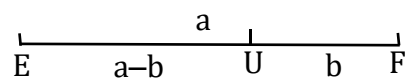


图 4.2

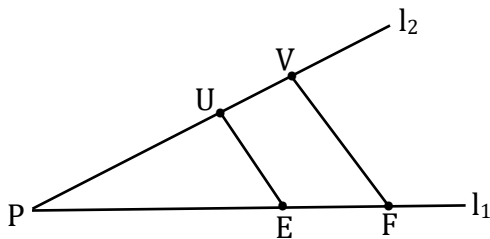


图 4.3

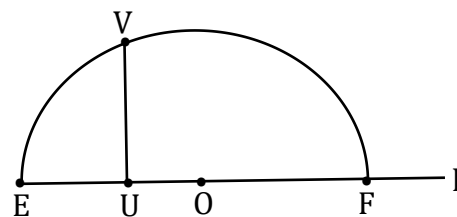


图 4.4

下面我们分析一下仅从点 p_1, p_2 (集合 $\{0, 1\}$) 出发能作出哪些点(复数),
 首先在 x 轴上可以作出点 $(a, 0)$, a 属于 Z , 在 y 轴上可以作出点 $(0, b)$, b 属于 Z ,
 进而可以作出平面上一切点 (a, b) 及点 (a, b) 的 m 分点 $(\frac{a}{m}, \frac{b}{m})$
 即 $Q(\sqrt{-1})$ 中的所有数属于 $C(0, 1)$,
 也称域 $Q(\sqrt{-1})$ 中的所有数都可以用尺规从数集 $\{0, 1\}$ 作出

引理 9.2 证明可以用尺规从 $S_0 = \{0, 1, z_1, z_2, \dots, z_n\}$

作出 $F = Q(\sqrt{-1}, z_1, \dots, z_n, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n)$, 其中 $z_i = a_i + b_i \sqrt{-1} (1 \leq i \leq n)$ 是复数

证: 易知, $F = F_0(\sqrt{-1})$, 其中 $F_0 = Q(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n)$

因为 $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ 可以用尺规从 S_0 作出

由引理 9.1 可知, F_0 可以用尺规从 S_0 作出,

从而, F 可以用尺规从 S_0 作出,

引理 9.3 设复数 $z=a+b\sqrt{-1}$ 能用尺规直接从 $S=\{0, 1, z_1, z_2, \dots, z_n\}$ 作出 ,
其中 $z_i(1\leq i\leq n)$ 是复数 ,

若令 $F=Q(\sqrt{-1}, z_1, \dots, z_n, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n)$,

则存在 F 的二次根式扩张链 F 包含于 $F(\alpha)$, α^2 属于 F , $\alpha^2\geq 0$, z 属于 $F(\alpha)$

证: 我们分三种情况讨论 :

(1)若 z 是两直线的交点 , 即 z 是方程组

$$\begin{cases} (a_1 - a_2)(y - b_2) = (b_1 - b_2)(x - a_2) \\ (c_1 - c_2)(y - d_2) = (d_1 - d_2)(x - c_2) \end{cases}$$

的解, 其中 $a_j+b_j\sqrt{-1}$, $c_j+d_j\sqrt{-1}(j=1, 2)$ 是 S_0 中的复数 ,

则由 $\frac{1}{2}(z_i+\bar{z}_i)$, $\frac{1}{2}(z_i-\bar{z}_i)$ 属于域 F 可知 , $a_j, b_j, c_j, d_j(j=1, 2)$ 属于域 F ,

那么线性方程组的解属于域 F , 从而 , 两直线的交点也属于域 F ,

(2)若 z 是直线与圆周的交点 , 即 z 是方程组

$$\begin{cases} (a_1 - a_2)(y - b_2) = (b_1 - b_2)(x - a_2) \\ (x - c)^2 + (y - d)^2 = r^2 \end{cases}$$

的解, 其中 $a_1+b_1\sqrt{-1}$, $a_2+b_2\sqrt{-1}$, $c+d\sqrt{-1}$ 是 S_0 中的复数 ,

则由 $\frac{1}{2}(z_i+\bar{z}_i)$, $\frac{1}{2}(z_i-\bar{z}_i)$ 属于域 F 可知 , a_1, a_2, b_1, b_2, c, d 属于 F ,

r 是 S_0 中两复数差的模 , 因而 , r^2 属于 F ,

所以 z 是 F 上二次方程的一个解,

且存在 F 的二次根式扩张链 F 包含于 $F(\alpha)$, α^2 属于 F , $\alpha^2\geq 0$, z 属于 $F(\alpha)$,

(3)若 z 是圆周与圆周的交点 , 即 z 是方程组

$$\begin{cases} (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = r_1^2 \\ (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 = r_2^2 \end{cases}$$

的解, 其中 $a_1+b_1\sqrt{-1}$, $a_2+b_2\sqrt{-1}$ 是 S_0 中的复数 ,

则由 $\frac{1}{2}(z_i+\bar{z}_i)$, $\frac{1}{2}(z_i-\bar{z}_i)$ 属于域 F 知 , a_1, a_2, b_1, b_2 属于 F ,

注意 , 上述两个方程相减后 , 变成了 F 上的直线方程与圆周方程构成的方程组

因此同(2) , 存在 F 的二次根式扩张链 F 包含于 $F(\alpha)$, α^2 属于 F , $\alpha^2\geq 0$, z 属于 $F(\alpha)$

定理 9.1 令 $F=Q(\sqrt{-1}, z_1, \dots, z_n, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n)$, 其中 $z_i(1 \leq i \leq n)$ 为复数, 那么一个复数 z 可以用尺规从 $S_0=\{0, 1, z_1, z_2, \dots, z_n\}$ 作出的充分必要条件是存在域 F 的一个二次根式扩张链 $F=F_0 \subseteq F_1 \subseteq \dots \subseteq F_m=E$ 使其满足: z 属于 E 其中 $F_i=F_{i-1}(u_i)$, u_i 是 x^2-a_i 的根, a_i 属于 F_{i-1} , $i=1, 2, \dots, m$,
证: (必要性) 若复数 z 可用尺规从 S_0 直接作出, 则由引理 9.3 可知结论成立, 如果 z 不能从 S_0 直接用尺规作出, 而是经过有限步作图之后再在此基础上可以作出, 即存在一串点 $z'_1, \dots, z'_i$, 满足 z'_{i+1} , 可以由 $S_0 \cup \{z'_1, \dots, z'_i\} (1 \leq i \leq t-1)$ 直接作出 于是对 t 用数学归纳法可以证明存在域 F 的一个二次根式扩张链 $F=F_0 \subseteq F_1 \subseteq \dots \subseteq F_m=E$ 使其满足: z 属于 E 其中 $F_i=F_{i-1}(u_i)$, u_i 是 x^2-a_i 的根, a_i 属于 F_{i-1} , $i=1, 2, \dots, m$, (充分性) 由引理 9.2 可知 F 的元素可以用尺规从 S_0 作出, 若 F_{i-1} 的元素可以用尺规从 S_0 作出, 则 $F_i=F_{i-1}(u_i)$ 中的元素是 F_{i-1} 的元素经加、减、乘、除、开方运算得到的, 由引理 9.1 可知 F_i 的元素可以用尺规从 S_0 作出, 因此, E 的元素可以用尺规从 S_0 作出, 所以, z 可以用尺规从 S_0 作出

推论 9.1 令 $F=Q(z_1, \dots, z_n, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n)$,

若复数 z 可以用尺规从 $\{0, 1, z_1, z_2, \dots, z_n\}$ 作出,

则 z 是 F 上次数为 2 的幂的代数元,

证: 由定理 9.1, 存在域 F 的一个二次根式扩张链 $F \subseteq F_0=F(\sqrt{-1}) \subseteq F_1 \subseteq \dots \subseteq F_m=E$ 使其满足: z 属于 E , 其中 $F_i=F_{i-1}(u_i)$, u_i 是 x^2-a_i 的根, a_i 属于 F_{i-1} , $i=1, 2, \dots, m$ 显然, E 关于 F 的扩张次数是 2 的幂, 进而由 $|E:F|=|E:F(z)||F(z):F|$ 可知, z 是 F 上次数为 2 的幂的代数元,

例 9.1 化圆为方问题，

解：这个问题可以归结为从两点 $(0, 0)(1, 0)$ (或数集 $S_0=\{0, 1\}$)出发

求满足 $x^2=\pi$ 的 z 能否用尺规作出

(圆的半径为 1，则圆的面积为 π ，所求正方形的边长为 z)

因为 $z^2=\pi$ ， π 是超越元，故 z 也是超越元， z 不会是 Q 上次数为 2 的幂的代数元

由推论 9.1 可知， z 不能用尺规作出，

例 9.2 倍立方问题，

解：这个问题可以归结为从两点 $(0, 0), (1, 0)$ (或数集 $S_0=\{0, 1\}$)出发，

求满足 $x^3=2$ 的 z 能否用尺规作出

(已知立方体的边长为 1，所求立方体的边长为 z)

因为属于 $Q[x]$ 的 $f(x)=x^3-2$ 是不可约元，

所以 $|Q(z):Q|=3$ ，即 z 不会是 Q 上次数为 2 的幂的代数元，

由推论 9.1 可知， z 不能用尺规作出，

例 9.3 三等分角问题

解：若任意一个角可以三等分，则 60° 角也应该能三等分，

进而 $\cos 20^\circ$ 可以用尺规作出，但是 $\cos 60^\circ = \frac{1}{2} = 4(\cos 20^\circ)^3 - 3\cos 20^\circ$ ，

即 $\cos 20^\circ$ 是方程 $4x^3 - 3x - \frac{1}{2} = 0$ 的根，

我们将 60° 角的三等分问题归结为：

已知三个点 $z_1=0, z_2=1, z_3=\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$ ，如图 4.5

求满足 $4x^3 - 3x - \frac{1}{2} = 0$ 的 $z=\cos 20^\circ$ 能否用尺规作出

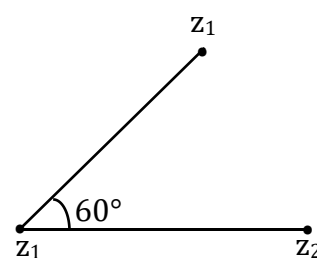


图 4.5

显然， $F=Q(z_1, z_2, z_3)=Q(\sqrt{-3})$ ， $|F:Q|=2$ ，

若 $z=\cos 20^\circ$ 可以用尺规作出，则存在 n ，使得 $|F(z):F|=2^n$ ，

进而， $|F(z):Q|=2^{n+1}$

因为属于 $Q[x]$ 的多项式 $4x^3 - 3x - \frac{1}{2}$ 是不可约的，所以 $|Q(z):Q|=3$ ，

这与 $|F(z):Q|=|F(z):Q(z)||Q(z):Q|$ 矛盾，因此，不能用尺规作出三等分角，