1，令 G 是群，试证明对属于 N 的任意 m , n，有$(G^{(m)})^{(n)}=G^{(m+n)}$

证明: 对 m+n 用数学归纳法，当 m+n=0 , 1 时显然成立，

假设结论对 m+n 成立，下证结论对 m+n+1 也成立，

分两种情况讨论，

$(G^{(m)})^{(n+1)}=[(G^{(m)})^{(n)}, (G^{(m)})^{(n)}]=[G^{(m+n)}, G^{(m+n)}]=G^{(m+n+1)}$

$(G^{(m+1)})^{(n)}=[(G^{(m+1)})^{(n-1)}, (G^{(m+1)})^{(n-1)}]=[G^{(m+n)}, G^{(m+n)}]=G^{(m+n+1)}$

2，试证明可解群的同态像是可解群，

证明: 设ρ是可解群 G 到群 G'的同态映射，

则由群同态基本定理可知 $G/\mathrm{Ker}\,\rho \cong \mathrm{Im}\,\rho$,

因为可解群的商群可解, 所以 Im ρ可解,

3，设 H 是群 G 的极大正规子群，即 H≠G，

且真包含 H 的 G 的正规子群只有 G 本身，试证明 G/H 是单群，

证明: 设 N/H 是 G/H 的一个正规子群，则 N 是 G 的正规子群，且 N 包含 H，

从而 N=H 或 N=G，那么 N/H={1}或 N/H=G/H，即 G/H 是单群，

4，试证明 8 , 9 阶群均是可解群，

证明: 由于 $8=2^3$, $9=3^2$，由[第四章例 7.3]知它们均是可解群

5，试证明 35 阶群是可解群

证明: 由于 35=5×7，由[第四章例 7.4]知 35 阶群是可解群，

6，设 N 是群 G 的正规子群，且 $N\cap G^{(1)}=\{1\}$，试证明 N 包含于 C(G)，

证明: 如果 a 属于 N , g 属于 G，则 $aga^{-1}g^{-1}$ 属于 $N\cap G^{(1)}=\{1\}$，

从而有 $aga^{(-1)}g^{(-1)}=1$，即 ag=ga，因此 a 属于 C(G) , N 包含于 C(G)

7，设 H，N 是群 G 的正规子群，且 G/H，G/N 都是可解群，

试证明 $G/(H\cap N)$也是可解群，

证明: 因为 H，N 是群 G 的正规子群，所以正规子群 $H\cap N$ 也是群 G 的正规子群，

由第一同构定理有 $HN/N\cong H/(H\cap N)$，

因为 G/N 可解，故 HN/N 为 G/N 的可解子群，

由第二同构定理，有$(G/H\cap N)/(H/H\cap N)\cong G/H$，

由[第四章命题 7.2(3)]可知 $G/(H\cap N)$可解

8，设 H，N 是群 G 的正规子群，若 H，N 都是 G 的可解子群，

试证明 HN 也是 G 的可解子群，

证明: 由第一同构定理知 $HN/N\cong H/(H\cap N)$，由于 H 可解,

则 H 的商群 $H/H(H\cap N)$可解,

又因为 N 可解，所以由[第四章命题 7.2(3)]可知 HN 可解,

习题 1 设σ是群 G 到 G'的一个满同态，

试证明当且仅当 $G^{(1)}$包含于 Ker σ时，G'是交换群

证明: 当且仅当 $G^{(1)}$包含于 Ker σ时，根据同构于 G/Ker σ的 G'是交换群，得证

习题 2 当且仅当 $G^{(1)}=\{e\}$时，群 G 是交换群

证明: 由换位子群的定义可得，

习题 3 求交错群 A_4 的换位子群，

解: A_4 有正规子群 $K=\{(1),(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}$，

于是有商群 A_4/K，商群 A_4/K 阶为 3，因此是交换群，$A_4^{(1)}$包含于 K，

因为 A_4 不是交换群，所以$A_4^{(1)}\neq\{e\}$，

因为$(123)(12)(34)(123)^{-1}=(14)(23)$，所以$\langle(12)(34)\rangle$不是 A_4 的正规子群，

同理$\langle(13)(24)\rangle$和$\langle(14)(23)\rangle$也不是 A_4 的正规子群，即$A_4^{(1)}$不能是 2 阶群，

故$A_4^{(1)}=K$

习题 4 求对称群 $S_n(n>2)$的换位子群，

解: 因为 A_n 是 S_n 的正规子群，商群 S_n/A_n 的阶为 2，

所以 S_n/A_n 是交换群，因此，$S_n^{(1)}$包含于 A_n

因为 $A_n(n>2)$可以由 3 轮换生成

而对于每一个 3 轮换(ijk)有$(ijk)=(ij)(ik)(ij)^{-1}(ik)^{-1}$属于$S_n^{(1)}$

因此 A_n 包含于$S_n^{(1)}$，故$S_n^{(1)}=A_n$

习题 5 设 G 是可解群，试证明 G 有正规子群列 $G=G_0\supseteq G_1\supseteq\cdots\supseteq G_{s-1}\supseteq G_s=\{1\}$满足:

G_i 是 G 的正规子群且商群 G_{i-1}/G_i 是交换群，其中 $i=1,\cdots,s$

证明: 取 $G_i=G^{(1)}$即可，

习题 6 设 G 是 p−群，试证明 G 有正规子群列 $G=G_0\supseteq G_1\supseteq\cdots\supseteq G_{s-1}\supseteq G_s=\{1\}$

满足 G_i 是 G 的正规子群且商群 G_{i-1}/G_i 包含在 G/G_i 的中心里，其中 $i=1,\cdots,s$

证明: 对$|G|$用数学归纳法，

若$|G|=p$，显然成立，若$|G|>p$，则 G 的中心 $C(G)\neq\{1\}$，

从而 $G/C(G)$有满足条件的正规子群列

$G/C(G)=G_0/C(G)\supseteq G_1/C(G)\supseteq\cdots\supseteq G_{s-1}/C(G)=\{1\}$，

易知 $G=G_0\supseteq G_1\supseteq\cdots\supseteq G_{s-1}\supseteq G_s=C(G)\supseteq\{1\}$是满足条件的 G 的正规子群列，

习题 7 设 G 是有限可解群，

若 G 的正规子群列 $G=G_0\supseteq G_1\supseteq G_2\supseteq G_3\supseteq G_4=\{1\}$的商群 G_{i-1}/G_i 的阶

依次为 2，3，2，2，其中 $i=1,\cdots,4$，求 G 的阶，

解: G 是有限可解群，若 G 的正规子群列 $G=G_0\supseteq G_1\supseteq\cdots\supseteq G_{s-1}\supseteq G_s=\{1\}$

满足商群 G_{i-1}/G_i 的阶为素数 p_i，其中 $i=1,\cdots,s$

则$|G|=|G_0|=|G_1||G_0:G_1|=|G_2||G_1:G_2||G_0:G_1|$

$=|G_s||G_{s-1}:G_s|\cdots|G_1:G_2||G_0:G_1|=p_s\cdots p_2p_1$

即商群的个数 s 由$|G|$的素因子个数决定，

商群的阶构成的素数组 $p_1,p_2,\cdots,p_s$(不考虑先后次序)由$|G|$唯一决定，

$|G|=2\times3\times2\times2=24$