我们已经清楚单扩张的代数结构，

接下来，要考虑的是添加有限个代数元的扩张的结构，

与单代数扩张是有限扩张一样，

本节将证明添加有限个代数元的扩张也是有限扩张，

特别地，我们将给出有限扩张可以通过单代数扩张实现的充分条件，

定义 3.1 设包含 F 的 E 是域的扩张，若 E 中每个元素都是 F 上的代数元，则称包含 F 的扩张 E 是代数扩张，否则称包含 F 的 E 是超越扩张，

定理 3.1 有限扩张一定是代数扩张，

即若$|E:F|=n<\infty$，则包含 F 的 E 是代数扩张

证: 任取属于 E 的α，考虑 $n+1$ 个元素 $1,\alpha,\cdots,\alpha^n$

因为$|E:F|=n$，所以这 $n+1$ 个元素在 F 上一定是线性相关的，

即存在不全是 0 的属于 F 的元素 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 使得 $a_0+a_1\alpha+\cdots+a_n\alpha^n=0$，

这就是说，

α是属于 F[x]的非零多项式 $a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ 的根，即α是 F 上的代数元

由α的任意性可知，包含 F 的 E 是代数扩张

定理 3.2 设 $K \supseteq E \supseteq F$ 是域的扩张，若包含 E 的 K 和包含 F 的 E 是有限扩张，

则包含 F 的 K 是有限扩张，且 $|K:F|=|K:E||E:F|$，

证: 令 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 和 $k_1, k_2, \cdots, k_m$ 分别是包含 F 的扩张 E 和包含 E 的 K 的基底，

我们只需要指出集合 $\{e_i k_j\}_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant m}$ 是包含 F 的扩张 K 的基底就可以了，

首先，我们证明属于 K 的任意 k 均可由集合 $\{e_i k_j\}_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant m}$ 的元素表示，

由于 $k_1, k_2, \cdots, k_m$ 是包含 E 的扩张 K 的基底，

所以存在属于 E 的 $a_1, a_2, \cdots, a_m$，使得 $k=a_1k_1+a_2k_2+\cdots+a_mk_m$，

又因 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 是包含 F 的扩张 E 的基底，

所以对于属于 E 的 $a_j(1\leqslant j\leqslant m)$，存在属于 F 的 $a_{j1}, a_{j2}, \cdots, a_{jn}$

使得 $a_j=a_{j1}e_1+a_{j2}e_2+\cdots+a_{jn}e_n$

于是 $k=\sum_{j=1}^{m} a_j k_j=\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji}e_i\right)k_i=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ji}e_i k_j$，其中 a_{ji} 属于 F

其次，如果果 $0=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ji}e_i k_j$，其中 a_{ji} 属于 F

那么 $0=\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji}e_i\right)k_i$，而 $\sum_{i=1}^{n} a_{ji}e_i$ 属于 E

又因 $k_1, k_2, \cdots, k_m$ 是包含 F 的扩张 E 的基底，

所以对任意 $j=1,2,\cdots,m$，有 $\sum_{i=1}^{n} a_{ji}e_i=0$

又因为 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 是包含 F 的扩张 E 的基底，

所以对任意 $j=1, 2, \cdots, m, i=1, 2, \cdots, n$，有 $a_{ji}=0$，

即集合 $\{e_i k_j\}_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant m}$ 是线性无关的，

至此，集合 $\{e_i k_j\}_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant m}$ 包含 F 的扩张 E 的基底，

扩张次数为 $|K:F|=|K:E||E:F|$，即包含 F 的 K 是有限扩张，

定理 3.3 设 F 是域，

(1)若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是 F 上的代数元，则包含 F 的$F(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$是有限扩张，

(2)若包含 F 的扩张 E 是有限扩张，

则存在有限个 F 上的代数元$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，使得$E=F(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$

证: (1)若设属于 F[x]的$f_i(x)$是α_i在 F 上的极小多项式，$(i=2,\cdots,n)$，

则$f_i(x)$可以看做是$F(\alpha_1,\cdots,\alpha_{i-1})[x]$中以$\alpha_i$为根的多项式，

即α_i是$F(\alpha_1,\cdots,\alpha_{i-1})$上的代数元，

从而，包含$F(\alpha_1,\cdots,\alpha_{i-1})$的$F(\alpha_1,\cdots,\alpha_{i-1})(\alpha_i)$是单代数扩张，所以是有限扩张

特别地，包含 F 的单代数扩张$F(\alpha_1)$也是有限扩张，

这样，我们就可以考虑$F(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\supseteq F(\alpha_1,\cdots,\alpha_{i-1})\supseteq\cdots\supseteq F(\alpha_1,\alpha_2)\supseteq F(\alpha_1)\supseteq F$

所以，由定理 3.2 有包含 F 的$F(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$是有限扩张，

(2)如果$|E:F|=n<\infty$，

则存在由属于 E 的 n 个元素$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$组成的包含 F 的扩张 E 的一组基底，

那么$E=F(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，

因为 E 是 F 的有限扩张，从而 E 是 F 的代数扩张，

所以，E 的元素$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是 F 上的代数元，

推论 3.1 如果α,β是域 F 上的代数元，

则$\alpha+\beta,\alpha-\beta,\alpha\beta,\ \frac{\alpha}{\beta}$都是域 F 上的代数元，$(\beta$不为 0)

定理 3.4 若包含 E 的扩张 K，包含 F 的扩张 E 都是代数扩张，

则包含 F 的 K 是代数扩张，

证: 我们只需指出对于任意一个属于 K 的 k 是 F 上的代数元即可，

因为包含 E 的 K 是代数扩张，

所以属于 K 的 k 是 E 上的代数元，即它是 E[x]中某个非零多项式的根，

不妨令该多项式为 $a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$，

则 k 是 $F(a_0,a_1,\cdots,a_n)$上多项式的根，即是域 $F(a_0,a_1,\cdots,a_n)$上的代数元，

所以包含 $F(a_0,a_1,\cdots,a_n)$的 $F(a_0,a_1,\cdots,a_n)(k)$是有限扩张，

又因为包含 F 的 E 是代数扩张，所以属于 E 的 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 是 F 上的代数元，

于是包含 F 的 $F(a_0,a_1,\cdots,a_n)$是有限扩张，

从而，包含 F 的 $F(a_0,a_1,\cdots,a_n)(k)$是有限扩张，

由于有限扩张是代数扩张，所以属于 K 的 k 是 F 上的代数元，

注意，有限扩张是代数扩张，但是代数扩张不一定是有限扩张，

例如，若令 $S=\{\sqrt{2},\sqrt[3]{2},\sqrt[4]{2},\cdots\}$，

则包含 Q 的 Q(S)是代数扩张，但不是有限扩张

事实上，若包含 Q 的 Q(S)是有限扩张，且扩张次数为 n，

则因为$\sqrt[n+1]{2}$是 Q[x]中不可约元 $h(x)=x^{n+1}-2$ 的根，

所以 $1,\sqrt[n+1]{2},\left(\sqrt[n+1]{2}\right)^2,\cdots,\left(\sqrt[n+1]{2}\right)^n$是 Q(S)中线性无关的元素，

这与$|Q(S):Q|=n$ 矛盾，因此，包含 Q 的 Q(S)不是有限扩张，

另外，集合 QUS 中每个元素都是 Q 上的代数元，

那么由推论 3.1 可知，Q(S)中每个元素都是 Q 上的代数元，

因此，包含 Q 的 Q(S)是代数扩张，

添加有限个代数元得到的有限扩张有时也可以通过仅添加一个代数元来实现，

引理 3.1 设 F 是无限域，包含 F 的 E 是有限扩张，并且 $E=F(\alpha,\beta)$，

若β在 F 上的极小多项式没有重根，则存在属于 E 的ξ，使得 $E=F(\xi)$，

证: 设α,β不属于 F，令 $f(x)$和 $g(x)$分别是α和β的极小多项式，

并且$\alpha_1=\alpha,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$和$\beta_1=\beta,\beta_2,\cdots,\beta_s$分别是 $f(x)$和 $g(x)$的所有根

考虑方程 $x(\beta_j-\beta)=\alpha-\alpha_i, i=1,\cdots,r, j=2,\cdots,s$

因为$|F|=\infty$，所以存在属于 F 的 b，使得 $b(\beta_j-\beta)\neq\alpha-\alpha_i, 1\leqslant i\leqslant r, 2\leqslant j\leqslant s$，

若令$\xi=\alpha+b\beta$，则一定有 $F(\alpha,\beta)=F(\xi)$，原因如下:

因为 $F(\alpha,\beta)$包含 $F(\xi)$，所以如果我们能够指出β属于 $F(\xi)$，则$\xi-b\beta=\alpha$属于 $F(\xi)$

于是 $F(\alpha,\beta)$包含于 $F(\xi)$，导致 $F(\alpha,\beta)=F(\xi)$，

事实上，若令 $f(\xi-bx)=h(x)$属于 $F(\xi)[x]$，则β是 $g(x),h(x)$的共同根，

又从 b 的选取原则可知，$g(x)$的其他根都不是 $h(x)$的根，

另外，极小多项式 $g(x)$没有重根，

所以 $x-\beta$是 $g(x),h(x)$在 $F(\xi)[x]$中的最大公因子，

从而 $x-\beta$属于 $F(\xi)[x]$，进而β属于 $F(\xi)$，

定理 3.5 设 F 是无限域，包含 F 的 E 是有限扩张，并且 $E=F(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，

如果$\alpha_i(2\leqslant i\leqslant n)$在 F 上的极小多项式没有重根，那么存在属于 E 的ξ使得 $E=F(\xi)$

证: 对 n 用数学归纳法，当 $n=1$ 时，结论成立，

假设 $n=k-1$ 时，结论成立，下证 $n=k$ 时，结论成立，

因为包含 F 的扩张 $F(\alpha_1,\cdots,\alpha_{k-1})$是有限扩张，

且$\alpha_i(2\leqslant i\leqslant k-1)$在 F 上的极小多项式没有重根，

所以由归纳假设可知，存在属于 E 的ξ_0使得 $F(\alpha_1,\cdots,\alpha_{k-1})=F(\xi_0)$，

从而 $E=F(\alpha_1,\cdots,\alpha_{k-1})(\alpha_k)=F(\xi_0)(\alpha_k)=F(\xi_0,\alpha_k)$

另外，包含 F 的扩张 $F(\xi_0,\alpha_k)$满足引理 3.1 的条件，

因此，存在属于 E 的ξ使得 $F(\xi_0,\alpha_k)=F(\xi)$，

从而 $E=F(\xi)$，结论成立，

如果定理 3.5 中的域 F 是有限域，则同样有 F 的有限扩张是单代数扩张，

因为在特征为零的域上，不可约多项式没有重根，所以我们有下面的推论

推论 3.2 若域 F 的特征为零，则包含 F 的有限扩张 E 一定是单代数扩张，

定义 3.2 设包含 F 的 E 是有限扩张，若存在属于 E 的ξ，使等式 E=F(ξ)成立，则称ξ是包含 F 的 E 的本原元

例 3.1 试求包含 Q 的扩张 $Q(\sqrt{2}, \sqrt{3})$的本原元ξ，

解: 首先，因为$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$在 Q 上的极小多项式分别为 x^2-2 和 x^2-3，

并且它们的极小多项式的所有根分别是$\sqrt{2}$，$-\sqrt{2}$和$\sqrt{3}$，$-\sqrt{3}$

其次，考虑方程 $x(-\sqrt{3}-\sqrt{3})=\sqrt{2}-\sqrt{2}$，$x(-\sqrt{3}-\sqrt{3})=\sqrt{2}+\sqrt{2}$，

显然，$x=1$ 不适合上面的所有方程，

于是取$\xi=\sqrt{2}+\sqrt{3}$，即有 $Q(\sqrt{2}, \sqrt{3})=Q(\sqrt{2}+\sqrt{3})$，

注意，例 3.1 中ξ的取法不是唯一的，