

1, 在 $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ 中, 判别 $2+\sqrt{5}$ 与 $2-\sqrt{5}$ 是否相伴,

解: 若 $2+\sqrt{5}$ 与 $2-\sqrt{5}$ 相伴,

则存在属于 $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ 的可逆元 $u=a+b\sqrt{5}$ 使得 $2+\sqrt{5}=(a+b\sqrt{5})(2-\sqrt{5})$,

从而 $a=-9, b=-4$, 即 $2+\sqrt{5}=(2-\sqrt{5})(-9-4\sqrt{5})$,

设 $(-9-4\sqrt{5})(c+d\sqrt{5})=1$, 则 $c=-9, d=4$, 即 $-9-4\sqrt{5}$ 是可逆元,

故在 $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ 中 $2+\sqrt{5}$ 与 $2-\sqrt{5}$ 相伴,

2, 在 $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]=\{a+b\sqrt{-3}|a, b \in \mathbb{Z}\}$ 中, 试证明 4 和 $2+2\sqrt{-3}$ 没有最大公因子,

证明: 因为 4 的所有因子为 $\alpha=\pm 1, \pm 2, \pm(1\pm\sqrt{-3}), \pm 4$,

下面求 $2+2\sqrt{-3}$ 的所有因子,

令 $2+2\sqrt{-3}=\alpha\beta$, 其中 α, β 属于 $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$, 则 $16=N(\alpha)N(\beta)$,

当 $N(\alpha)=1, N(\beta)=16$ 时, $\alpha=\pm 1, \beta=\pm(2+2\sqrt{-3})$;

当 $N(\alpha)=2, N(\beta)=8$ 时, 这样的 α, β 不存在;

当 $N(\alpha)=4, N(\beta)=4$ 时, $\alpha=\pm 2, \beta=\pm(1+\sqrt{-3})$

或 $\alpha=\pm(1+\sqrt{-3}), \beta=\pm 2$ 或 $\alpha=\pm(1-\sqrt{-3}), \beta=\mp(1-\sqrt{-3})$,

从而 $2+2\sqrt{-3}$ 的所有因子为 $\pm 1, \pm 2, \pm(1\pm\sqrt{-3}), \pm(2+2\sqrt{-3})$

得到 4 和 $2+2\sqrt{-3}$ 公因子为 $\pm 1, \pm 2, \pm(1\pm\sqrt{-3})$,

因为 $2 \nmid (1+\sqrt{-3})$ 且 $(1+\sqrt{-3}) \nmid 2$, 所以 4 和 $2+2\sqrt{-3}$ 没有最大公因子,

3, 在 $Z[\sqrt{-3}] = \{(a + \sqrt{-3}b) | a, b \in Z\}$ 中, 试证明 $1 \pm \sqrt{-3}$ 是不可约元,

证明: 先说明 $1 \pm \sqrt{-3}$ 不是可逆元,

否则, 若 $1 \pm \sqrt{-3}$ 是可逆元, 则存在属于 Z 的 a, b 使得 $(1 \pm \sqrt{-3})(a + b\sqrt{-3}) = 1$

从而 $4(a^2 + 3b^2) = 1$, 与 a, b 属于 Z 矛盾, 因此 $1 \pm \sqrt{-3}$ 不是可逆元,

下面考察 $1 \pm \sqrt{-3}$ 的所有因子,

令 $1 \pm \sqrt{-3} = \alpha\beta$, α, β 属于 $Z[\sqrt{-3}]$, 则 $4 = N(\alpha)N(\beta)$,

若 $N(\alpha) = 1$, 则 $\alpha = \pm 1$, α 是可逆元;

若 $N(\alpha) = 2$, 这样的 α 不存在;

若 $N(\alpha) = 4$, 则 $N(\beta) = 1$, $\beta = \pm 1$, 即 β 是可逆元,

从而 $1 \pm \sqrt{-3}$ 与 α 相伴,

综上, $1 \pm \sqrt{-3}$ 仅有平凡因子, 所以 $1 \pm \sqrt{-3}$ 是不可约元,

4, 设 p, q 是整环 R 的不可约元, 且 $p|q$, 证明 p, q 相伴,

证明: 因为 q 只有平凡因子, 所以 p 可逆或 $p \sim q$, 若 $p \sim q$, 则结论得证

若 p 可逆, 则与 p 是不可约元矛盾

5, 在高斯整环 $Z[i]$ 中,

试证明若对属于 $Z[i]$ 的 α , 有 $N(\alpha) = p$ (p 是素数), 则 α 是不可约元,

证明: 因为 $N(0) = 0, N(\pm 1) = N(\pm i) = 1$, 所以 α 是非零、非可逆元,

令 $\alpha = \alpha_1\alpha_2$, 则 $N(\alpha) = N(\alpha_1)N(\alpha_2)$, 又 $N(\alpha) = p$, 从而 $N(\alpha_1) = 1$ 或 $N(\alpha_2) = 1$,

若 $N(\alpha_1) = 1$, 则 $\alpha_1 = \pm 1, \pm i$, 即 α_1 是可逆元;

若 $N(\alpha_2) = 1$, 则 α_2 是可逆元, 故 α 是不可约元,

6, 在高斯整环 $Z[i]$ 中, 将 $1 + 3i$ 表示成不可约元的乘积,

解: 设 α 是 $1 + 3i$ 的不可约因子,

令 $1 + 3i = \alpha\beta$, 则 $10 = N(\alpha)N(\beta)$, 由上题知, $N(\alpha) = 2$ 或 5 ,

当 $N(\alpha) = 2$ 时, $N(\beta) = 5$, 取 $\alpha = 1 + i, \beta = 2 + i$, 则 $1 + 3i = (1 + i)(2 + i)$,

7, 在高斯整环 $\mathbb{Z}[i]$ 中,

(1) 判断 $3-5i$ 能否被 $4+i$ 整除?

(2) 求与 $4+i$ 相伴的所有元素,

(3) 证明 $4+i$ 既是素元又是不可约元,

证明: (1) $\frac{3-5i}{4+i} = \frac{(3-5i)(4-i)}{16+1} = \frac{7-23i}{17}$, 故 $3-5i$ 不能被 $4+i$ 整除,

(2) $\mathbb{Z}[i]$ 中可逆元为 $\pm 1, \pm i$, 所以 $4+i$ 的所有相伴元为 $1-4i, 4i-1, 4+i, -4-i$

(3) $N(4+i)=17$, 根据题 5 可知 $4+i$ 是不可约元,

又因 $\mathbb{Z}[i]$ 是主理想整环, 所以 $4+i$ 是素元,

8, 在 $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \{(\alpha + \sqrt{-5}b) | a, b \in \mathbb{Z}\}$ 中, 证明 $2+\sqrt{-5}$ 是不可约元, 但不是素元

证明: 易知, $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ 的可逆元只有 ± 1 , 所以 $2+\sqrt{-5}$ 不是可逆元,

令 $2+\sqrt{-5} = \alpha\beta$, 则 $N(\alpha)N(\beta)=9$,

若 $N(\alpha)=1$, 则 $\alpha=\pm 1$ 是可逆元;

若 $N(\alpha)=3$, 不存在这样的 α ;

若 $N(\alpha)=9$, 则 $N(\beta)=1, \beta=\pm 1$ 是可逆元,

所以 $2+\sqrt{-5}$ 只有平凡因子, 是不可约元,

因为 $(2+\sqrt{-5})(2-\sqrt{-5})=9 \mid (3 \times 3)$, 但 $(2+\sqrt{-5}) \nmid 3$, 所以 $2+\sqrt{-5}$ 不是素元

9, 证明 $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ 不是主理想整环,

证明: 由 8 题知 $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ 不是主理想整环(因为素元与不可约元不等价),

10, 设 R 是主理想整环, a, b 属于 R ,

试证明当且仅当 d 是 a, b 的公因子且存在属于 R 的 u, v , 使得 $d=ua+vb$ 时, d 是 a, b 的最大公因子

证明: 充分性, 由最大公因子定义即可得证,

必要性, 令 $\langle d' \rangle = \langle a, b \rangle$, 则存在属于 R 的 u, v , 使得 $d'=u'a+v'b$, 由此得到 $d|d'$, 因为 a, b 属于 $\langle d' \rangle$, 所以 $d'|a, d'|b$, 即 d' 是 a, b 的公因子, 从而 $d'|d, d' \sim d$, 因此存在可逆元 r , 使得 $d=rd', d=ru'a+rv'b$,

11, 在高斯整环 $Z[i]$ 中, $\alpha=9+12i, \beta=2+4i$, 求 u, v 使得 $\alpha u + \beta v = (\alpha, \beta)$,

解: 令 $\alpha = \beta q + r$, 因为 $\alpha\beta^{-1} = (9+12i)(2+4i)^{-1} = \frac{33}{10} - \frac{3}{5}i$

所以取 $q=3-i$, 则 $r = \alpha - \beta q = (9+12i) - (2+4i)(3-i) = -1+2i, \alpha = \beta(3-i) + (-1+2i)$

令 $\beta = rq_1 + r_2$, 因为 $\beta r^{-1} = (2+4i)(-1+2i)^{-1} = \frac{6}{5} - \frac{8}{5}i$,

所以取 $q_1=1-2i$, 则 $r_2 = \beta - rq_1 = 2+4i - (-1+2i)(1-2i) = -1, \beta = (-1+2i)(1-2i) - 1$
 $l = -\beta + (-1+2i)(-2i+1) = -\beta + \alpha(-2i+1) - \beta(3-i)(-2i+1) = (7i-2)\beta + (1-2i)\alpha,$

12, 设 R 是主理想整环, p 是 R 的不可约元,

试证明对属于 R 的任意 a , 有 $p|a$ 或 p 与 a 互素

证明: 设 d 是 p 与 a 的最大公因子,

因为 p 是不可约元, 所以 d 是可逆元或与 p 相伴,

若 d 是可逆元, 则 p 与 a 互素, 若 d 与 p 相伴, 则 $p|a$,

13, 证明 $Z[\sqrt{2}] = \{(a + \sqrt{2}b) | a, b \in \mathbb{Z}\}$ 是欧氏环,

证明: 对 $\alpha = a + b\sqrt{2}$, 可令 $\delta(\alpha) = |a^2 - 2b^2|$,

对任意 $\alpha = a + b\sqrt{2}$, $\beta = c + d\sqrt{2}$, 有 $\delta(\alpha\beta) = \delta(\alpha)\delta(\beta)$,

若求 q, r 使得 $\alpha = \beta q + r$, 可以考虑: $\alpha\beta^{-1} = s + t\sqrt{2}$, 其中 $s = \frac{ac - 2bd}{c^2 - 2d^2}$, $t = \frac{cb - ad}{c^2 - 2d^2}$

然后再取属于 $\mathbb{Z}$ 的 s', t' , 使得 $|s - s'| \leq \frac{1}{2}$, $|t - t'| \leq \frac{1}{2}$

那么若令 $q = s' + t'\sqrt{2}$, $r = \alpha - \beta q$, 则有 q, r 属于 $Z[\sqrt{2}]$, 而且 $\alpha = \beta q + r$,

现在, 我们只需证明 $r=0$ 或 $\delta(r) < \delta(\beta)$, 但若 $r=0$, 则结论已成立,

若 $r \neq 0$, 则 $\delta(r) = \delta(\alpha - \beta q) = \delta(\beta)\delta(\alpha\beta^{-1} - q) = \delta(\beta)\delta(s - s' + \sqrt{2}t - \sqrt{2}t')$

$= \delta(\beta) |(s - s')^2 - 2(t - t')^2| < \delta(\beta)$,

即 $Z[\sqrt{2}] = \{a + \sqrt{2}b | a, b \in \mathbb{Z}\}$ 是欧氏环,

习题 1 设 R 是主理想整环, 试证明

(1) 若 $(a, b) = 1$ 且 $a | bc$, 则 $a | c$;

(2) 若 $(a, b) = 1$ 且 $a | c, b | c$, 则 $ab | c$,

证明: 由 $(a, b) = 1$ 可知存在属于 R 的 u, v , 使得 $ua + vb = 1$,

等式两边同时乘 c 得 $uac + vbc = c$, 若 $a | bc$, 则 $a | c$, 若 $a | c, b | c$, 则 $ab | c$,

习题 2 设 R 是主理想整环, a 是 R 的非零元素, 则以下结论等价:

(1) a 是素元; (2) a 是不可约元; (3) $\langle a \rangle$ 是素理想; (4) $\langle a \rangle$ 是极大理想,

证明: a 是不可约元 $\Leftrightarrow a$ 是素元,

a 是素元 $\Leftrightarrow \langle a \rangle$ 是素理想,

$\langle a \rangle$ 是素理想 $\Leftrightarrow \langle a \rangle$ 是极大理想,

习题 3 试证明 $R=\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ 不是主理想整环，

证明: 首先，对 $\alpha=a+b\sqrt{-3}$ 有 $N(\alpha)=a^2+3b^2=1 \Leftrightarrow a^2=1$ ，故 R 的可逆元只有 ± 1 ，

其次，若 $N(\alpha)=4$ ，则 α 必为不可约元，

事实上，设 $\alpha=\beta\gamma$ ，则 $4=N(\alpha)=N(\beta)N(\gamma)$ ，

因为对属于 $\mathbb{Z}$ 的任何 x, y ，必有 $x^2+3y^2 \neq 2$ ，所以必有 $N(\beta)=1$ 或者 $N(\gamma)=1$ ，

即 β 或 γ 为可逆元，故 α 为不可约元，据此， 2 和 $1 \pm \sqrt{-3}$ 都是不可约元，

最后，由 $4=2 \cdot 2=(1+\sqrt{-3})(1-\sqrt{-3})$ 知 4 没有唯一分解，

故 R 不是唯一分解整环

当然 $R=\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ 不是主理想整环，

习题 4 在 $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ 中，试证明 $1+\sqrt{-3}$ 是不可约元，也不是素元，

证明: 由上题知 $1+\sqrt{-3}$ 是不可约元，由于 $(1+\sqrt{-3}) \mid 2 \cdot 2$ ，但是 $(1+\sqrt{-3}) \nmid 2$ ，

故 $1+\sqrt{-3}$ 不是素元，

习题 5 试证明 $\sqrt{-3}$ 是 $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ 的素元，

证明: 设 α, β 属于 $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ ，若 $\sqrt{-3} \mid \alpha\beta$ ，则 $3 \mid N(\alpha)N(\beta)$ ，故不妨设 $3 \mid N(\alpha)$ ，

再设 $\alpha=a+b\sqrt{-3}$ ，则 $3 \mid (a^2+3b^2)$

从而必有 $3 \mid a$ ，即 $a=3a_1$ ，所以 $\alpha=\sqrt{-3}(b-a_1\sqrt{-3})$ ，显然 $\sqrt{-3} \mid \alpha$ ，结论得证

习题 6 在 $Z[\sqrt{-5}] = \{a + \sqrt{-5}b \mid a, b \in Z\}$ 中判断下列元素是否是不可约元:

$2, 7, 29, 2 - \sqrt{-5}, 6 - \sqrt{-5}$,

解: $Z[\sqrt{-5}]$ 的可逆元为 ± 1 , 设 α 属于 $Z[\sqrt{-5}]$, 若 $\alpha = \beta\gamma$, 则 $N(\alpha) = N(\beta)N(\gamma)$,

(1) 若 $N(\alpha)$ 为素数 p 的平方且 $a^2 + 5b^2 = p$ 无整数解, 则 α 是不可约元,

因为 $N(\beta) \mid p^2$, 所以 $N(\beta) = 1, p, p^2$, 因为 $a^2 + 5b^2 = p$ 无整数解, 故 $N(\beta) \neq p$,

若 $N(\beta) = 1$ 或 p^2 , 则 $\beta = \pm 1$ 或 $\pm \alpha$, 即 α 是不可约元,

(2) 若 $N(\alpha)$ 是素数 p , 则 $N(\beta) = 1$ 或 $N(\beta) = p$, 从而 $\beta = \pm 1$ 或 $\pm \alpha$, 即 α 是不可约元,

由(1)知 $2, 7, 2 - \sqrt{-5}$ 是不可约元,

由 $29 = (3 + 2\sqrt{-5})(3 - 2\sqrt{-5})$ 知, 29 不是不可约元,

由(2)知 $6 - \sqrt{-5}$ 是不可约元

习题 7 在 $Z[\sqrt{-5}] = \{a + \sqrt{-5}bi \mid a, b \in Z\}$ 中, 试证明 3 不是素元,

证明: $3 \mid (1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5})$, 但是因为 $N(3) = 9, N(1 \pm \sqrt{-5}) = 6$, 故 $3 \nmid (1 \pm \sqrt{-5})$

所以 3 不是素元,

习题 8 设属于 $Z[i]$ 的 α 是属于 Z 的某个素数 p 的非平凡因子,

试证明 α 是 $Z[i]$ 中的不可约元,

证明: 设 $p = \alpha\beta$, 则 $p^2 = N(\alpha)N(\beta)$,

因为属于 $Z[i]$ 的 α 是 p 的非平凡因子, 故 $N(\alpha) \neq 1, p^2$,

因此 $N(\alpha) = p$, α 是 $Z[i]$ 中的不可约元,

习题 9 设 α 是 $Z[i]$ 中的不可约元, 试证明 α 是属于 Z 的某个素数 p 的不可约因子

证明: 对属于 $Z[i]$ 的任意 α , 有 $\alpha \mid N(\alpha)$,

因为 $Z[i]$ 是唯一分解整环,

所以若 α 是 $Z[i]$ 中的不可约元, 则 α 是属于 Z 的某个素数 p 的因子,

习题 10 试证明 $\mathbb{Z}[i]/\langle 2+i \rangle$ 为域，

证明: 因为 $N(2+i)=5$ 是素数，因此 $2+i$ 是不可约元，

因为 $\mathbb{Z}[i]$ 是主理想整环，

而在主理想整环中，不可约元生成的理想一定是极大理想

从而 $\mathbb{Z}[i]/\langle 2+i \rangle$ 为域，

习题 11 在高斯整环 $\mathbb{Z}[i]$ 中，试证明 $\langle 2+3i \rangle$ 是极大理想， $\langle 3-i \rangle$ 不是素理想，

证明: 因为 $N(2+3i)=13$ 是素数，所以 $2+3i$ 是不可约元，故 $\langle 2+3i \rangle$ 是极大理想

而 $3-i=(1-2i)(1+i)$ ，故 $3-i$ 不是不可约元，从而 $\langle 3-i \rangle$ 不是素理想，

习题 12 试证明环 $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]=\{a+b\sqrt{-2} | a, b \in \mathbb{Z}\}$ 是欧氏环，

证明: 对 $\alpha=a+b\sqrt{-2}$ ，定义 $N(\alpha)=a^2+2b^2$ ，易知， $N(\alpha\beta)=N(\alpha)N(\beta)$ ，

令 $\alpha\beta^{-1}=s+t\sqrt{-2}$ ，其中 α, β 属于 $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ ，

取属于 $\mathbb{Z}$ 的 s', t' ，使得 $|s-s'| \leq \frac{1}{2}$ ，

令 $q=s'+t'\sqrt{-2}$ ， $r=\alpha-\beta q$ ，

则 $N(r)=N(\alpha-\beta q)=N(\beta)N(\alpha\beta^{-1}-q)=N(\beta)[(s-s')^2+2(t-t')^2] < N(\beta)$ ，

因此， $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ 是欧氏环，

习题 13 试证明在唯一分解整环中 $ab \sim (a, b)[a, b]$ ，

证明: 设 $a=up_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_t^{k_t}$ ， $b=vp_1^{l_1}p_2^{l_2}\cdots p_t^{l_t}$ ，

其中 u, v 是环中的可逆元， $p_1, p_2, \dots, p_t$ 是互不相伴的不可约元， k_i, l_i 属于 $\mathbb{N}$

则 $(a, b)=p_1^{r_1}p_2^{r_2}\cdots p_t^{r_t}$ ， $[a, b]=p_1^{s_1}p_2^{s_2}\cdots p_t^{s_t}$ ， $r_i=\min\{k_i, l_i\}$ ， $s_i=\max\{k_i, l_i\}$ ，

结论成立

习题 14 设 R 是唯一分解整环，属于 R 的 a 不等于 0 ，

试证明 R 仅有有限多个主理想含有 a ，

证明: 设 $\langle b \rangle$ 是含有 a 的任一理想，则 $b|a$ ，若 a 可逆，则 b 可逆， $\langle b \rangle = R$ ，

若 a 不可逆，则由 R 是唯一分解整环知 a 只有有限多个真因子，

因此，仅有有限多个主理想含有 a ，

习题 15 设 R 是有 1 的交换环， p 是不可约元，则理想 $\langle p \rangle$ 是 R 的非平凡理想，

证明: 用反证法，

假设 $\langle p \rangle = R$ ，由于 1 属于 R ，因此必有属于 R 的 p 使得 $pq=1$ ，从而 p 为可逆元，矛盾，

习题 16 设 R 是整环， R 中任何两个元素均有最大公因子，

试证明 R 中的不可约元是素元，

证明: 用反证法，

设 p 是不可约元，不是素元，则存在属于 R 的 a, b ，使 $p|ab$ 且 $p \nmid a, p \nmid b$ ，

因而有 $(p, a) \sim 1, (p, b) \sim 1$ ，由此得 $(p, ab) \sim 1$ ，这与 $p|ab$ 矛盾

习题 17 设 R 是主理想整环， R_1 是整环且 R 包含于 R_1 ，

又设 a, b 是 R 中非零元， d 为 a, b 在 R 中的最大公因子，

试证明 d 也是 a, b 在 R_1 中的最大公因子，

证明: 在 R_1 中仍有 $d|a, d|b$ ，于是 d 也是 a, b 在 R_1 中的公因子，

又有属于 R 的 u, v ，使得 $d=au+bv$ 属于 $R \subseteq R_1$ ，

若 d_1 是 a, b 在 R_1 中的公因子，则 $d_1|a$ 且 $d_1|b$ ，

于是 $d_1|d$ ，即 d 也是 a, b 在 R_1 中的最大公因子，

习题 18 设 R 是主理想整环, I 是 R 的理想且 $I \neq \{0\}$, 试证明

(1) R/I 的每个理想都是主理想;

(2) R/I 中仅有有限多个理想,

证明(1) 设 $\bar{J}$ 是 R/I 的一个理想, 于是有 I 包含于 R 的理想 J , 使得 $\bar{J} = J/I$,

因为 R 是主理想整环, 于是有属于 R 的 a , 使得 $J = \langle a \rangle$, 因此, $\bar{J} = \langle a+I \rangle$ 是主理想

(2) 设 $I = \langle b \rangle$, 若 b 可逆, 则 $I = R$, R/I 只有一个理想,

若 b 不可逆, 则 b 只有有限多个真因子,

由结论(1)知, 若 $\bar{J}$ 是 R/I 的一个理想, 则有 $\bar{J} = J/I$, $J = \langle a \rangle$, 由 I 包含于 J , 可得 $a|b$

由于 b 只有有限多个因子, 所以, R/I 中仅有有限多个理想,