

1, 设 R 是有 1 的交换环, 证明若 x 是 R 的未定元, 则 $x^k(k \geq 1)$ 也是 R 的未定元

证明: 对于属于 N 的 n , 和属于 R 的 $a_0, a_1, \dots, a_n$,

若 $a_n(x^k)^n + a_{n-1}(x^k)^{n-1} + \dots + a_1x^k + a_0 = 0$, 则 $a_nx^{kn} + a_{n-1}x^{kn-k} + \dots + a_1x^k + a_0 = 0$,

因为 x 是 R 的未定元, 故 $a_0 = a_1 = \dots = a_n = 0$, 故 $x^k(k \geq 1)$ 是 R 的未定元,

2, 在 $Z_3[x]$ 中, 判断 $x^3 + \bar{1}$ 能否被 $x^2 + x + \bar{1}$ 整除,

解: 若 $x^3 + 1$ 能被 $x^2 + x + 1$ 整除,

则存在属于 $Z_3[x]$ 的 $g(x)$, 使得 $x^3 + 1 = (x^2 + x + 1)g(x)$,

从而 $g(x) = x + \bar{b}$, 于是有 $(x^2 + x + 1)(x + \bar{b}) = x^3 + (\bar{b} + 1)x^2 + (\bar{b} + 1)x + \bar{b} = x^3 + 1$,

因此 $\bar{b} + 1 = \bar{0}$, $\bar{b} = \bar{1}$,

但是这样的 $\bar{b}$ 不存在, 故 $x^3 + 1$ 不能被 $x^2 + x + 1$ 整除,

(说明: $\bar{1}$ 是单位元, 我们常用 1 表示单位元, 因此二者可以互用, 后文同)

3, 证明环 $Z[x]$ 的理想 $\langle x \rangle$ 是素理想,

证明 1: 因为 $Z[x]/\langle x \rangle \cong Z$, 所以 $Z[x]/\langle x \rangle$ 是整环, 从而 $\langle x \rangle$ 是素理想,

证明 2: 若 $x|f(x)g(x)$, 则 $x|f(x)$ 或 $x|g(x)$, 即 x 是素元, 从而 $\langle x \rangle$ 是素理想

4, 证明 $\langle x^2 + 1 \rangle$ 不是 $Z_2[x]$ 的素理想,

证明 1: $Z_2[x]$ 是域上的多项式环, 所以是主理想整环, $x^2 + 1 = (x + 1)(x + 1)$,

即 $x^2 + 1$ 是可约元, 从而不是素理想,

证明 2: $Z_2[x]$ 是整环, $x^2 + 1|(x + 1)(x + 1)$, 但是 $x^2 + 1 \nmid (x + 1)$, 所以 $x^2 + 1$ 不是素元

从而, $\langle x^2 + 1 \rangle$ 不是素理想,

证明 3: 设 $f(x) = x^2 + 1$, 则 $f(1) = 0$, 所以 $f(x)$ 是可约元,

从而 $\langle x^2 + 1 \rangle$ 不是 $Z_2[x]$ 的素理想,

5, 证明 $\langle x^2+\bar{1} \rangle$ 是 $Z_3[x]$ 的极大理想,

证明: 因为 $Z_3[x]$ 是主理想整环, 只需说明 $f(x)=x^2+1$ 是不可约多项式,

因为 $f(\bar{0}) \neq 0, f(\bar{1}) \neq 0, f(\bar{2}) \neq 0$, 故 $f(x)=x^2+1$ 不可约,

因此 $\langle x^2+1 \rangle$ 是 $Z_3[x]$ 的极大理想,

6, 证明 $Z_2[x]/\langle x^2+x+\bar{1} \rangle$ 是域,

证明: 因为 Z_2 是域, 所以 $Z_2[x]$ 是主理想整环,

下面证明 x^2+x+1 为 $Z_2[x]$ 上的不可约多项式,

令 $f(x)=x^2+x+1$, 因为 $f(\bar{0}) \neq 0, f(\bar{1}) \neq 0$, 所以 $f(x)$ 不可约,

因此 $\langle x^2+x+1 \rangle$ 是 $Z_2[x]$ 的极大理想, 故 $Z_2[x]/\langle x^2+x+1 \rangle$ 是域

7, 证明环 $Z[x]$ 的任一个主理想都不是极大理想,

证明: 设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$ 属于 $Z[x]$,

若 $f(x)=0$, 则 $\langle f(x) \rangle \subset \langle x \rangle \subset Z[x]$, 则 $\langle f(x) \rangle$ 不是极大理想,

若 $f(x)=1$, 则 $\langle f(x) \rangle = Z[x]$,

若 $\deg f(x)=0$, 设 $f(x)=a \neq 1$, 则 $\bar{a}$ 是 $Z[x]/\langle a \rangle$ 的非零不可逆元

(否则 $xg(x)-1=ah(x)$, 比较常数项, 可知矛盾),

故 $Z[x]/\langle f(x) \rangle$ 不是域, 从而 $\langle f(x) \rangle$ 不是极大理想,

若 $\deg f(x) > 0$, 则取素数 p 满足 $p \nmid a_i, i=0, 1, \dots, n$,

则 $\bar{p}$ 是 $Z[x]/\langle f(x) \rangle$ 的非零不可逆元

(否则 $pg(x)=f(x)h(x)+1$, 比较常数项, 可知矛盾),

故 $Z[x]/\langle f(x) \rangle$ 不是域, 所以 $\langle f(x) \rangle$ 不是极大理想,

8, 设 p 是素数, 试证明对属于 $Z_p[x]$ 的任意多项式 $f(x), g(x)$, 有

(1) $[f(x)+g(x)]^p=[f(x)]^p+[g(x)]^p$;

(2) $[f(x)]^p=f(x^p)$,

证明(1)因为 Z_p 的特征为 p , 所以得证,

(2)因为 Z_p 的特征为 p , 所以得证,

9, 求属于 $Q[x]$ 的 $x^5+2x^4-10x^3-19x^2+x+1$

除以属于 $Q[x]$ 的 x^4-10x^2+1 的商式和余式,

解: $f(x)=x^5+2x^4-10x^3-19x^2+x+1, g(x)=x^4-10x^2+1,$

$f(x)=g(x)(x+2)+x^2-1,$

10, 令 $f(x)=x^2-1$ 属于 $Q[x], g(x)=x^4-10x^2+1$ 属于 $Q[x],$

求 $Q[x]$ 中多项式 $u(x), v(x)$ 使得 $f(x)u(x)+g(x)v(x)=(f(x), g(x)),$

解: $g(x)=f(x)(x^2-9)-8, 1=\frac{1}{8}f(x)(x^2-9)-\frac{1}{8}g(x)$

11, 试求属于 $Z_8[x]$ 的多项式 $f(x)=x^3+x^2-\bar{2}x$ 在 Z_8 上的所有异根,

解: $f(\bar{0})=\bar{0}, f(\bar{1})=\bar{0}, f(\bar{2})=\bar{0}, f(\bar{3})=\bar{6}, f(\bar{4})=\bar{0}, f(\bar{5})=\bar{4}, f(\bar{6})=\bar{0}, f(\bar{7})=\bar{2},$

所有异根为 $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}$

习题 1 设 $F[x]$ 是数域 F 上的多项式环,

试证明 $\langle x \rangle$ 是 $F[x]$ 的极大理想, 且 $F[x]/\langle x \rangle$ 是域

证明: 因为映射 $\varphi: F[x] \rightarrow F$, 使得 $\sum_{i=0}^n a_i x^i \rightarrow a_0$ 是满同态映射, 同态核为 $\langle x \rangle$

所以 $F[x]/\langle x \rangle$ 与 F 同构,

这说明 $F[x]/\langle x \rangle$ 是域, 从而 $\langle x \rangle$ 是 $F[x]$ 的极大理想,

习题 2 求 $Z[x]/\langle x^2+1 \rangle,$

解: 对属于 $Z[x]$ 的任意 $f(x)$, 由带余除法知

$f(x)=(x^2+1)q(x)+r(x), r(x)=0$ 或 $\deg r(x)<2,$

则 $\overline{f(x)}=\overline{r(x)},$ 从而 $Z[x]/\langle x^2+1 \rangle=\{\overline{ax+b} \mid a, b \in Z\},$

习题 3 在 $Z_7[x]$ 中, 计算乘积 $(\bar{5}x+\bar{2})(\bar{3}x^3+\bar{5}x+\bar{1}),$

解: $(\bar{5}x+\bar{2})(\bar{3}x^3+\bar{5}x+\bar{1})=\bar{15}x^4+\bar{6}x^3+\bar{25}x^2+\bar{15}x+\bar{2}=x^4+\bar{6}x^3+\bar{4}x^2+\bar{1}x+\bar{2},$

习题 4 证明 $\langle x^2+1 \rangle$ 是 $Z_3[x]$ 的极大理想，

证明 1: 定义映射 $\varphi: Z_3[x] \rightarrow Z_3[i], f(x) \rightarrow f(i)$ ，易知， φ 是环的满同态映射，

根据环同态基本定理知， $Z_3[x]/\text{Ker}\varphi \cong Z_3[i]$ ，

根据带余除法可知，对属于 $Z_3[x]$ 的任意 $f(x)$ ，有 $f(x) = (x^2+1)q(x) + ax+b$

若 $f(x)$ 属于 $\text{Ker } \varphi$ ，则 $ai+b=0, a=b=0$ ，即 $\text{Ker } \varphi = \langle x^2+1 \rangle$ ，

因为 $Z_3[i]$ 是有限整环，从而是域故 $\langle x^2+1 \rangle$ 是 $Z_3[x]$ 的极大理想，

证明 2: 若 I 是真包含 $\langle x^2+1 \rangle$ 的理想，则存在 $f(x)$ 属于 $I - \langle x^2+1 \rangle$ ，

根据带余除法可知 $f(x) = (x^2+1)q(x) + ax+b$ ，从而 $ax+b$ 属于 $I - \langle x^2+1 \rangle$ ，

若 $a=0$ ，则 $b \neq 0, b$ 属于 I ，从而 1 属于 $I, I = Z_3[x]$ ，

若 $a \neq 0$ ，则 $0 \neq a^2+b^2 = a^2(x^2+1) - (ax+b)(ax-b)$ 属于 I ，从而 1 属于 $I, I = Z_3[x]$

所以 $\langle x^2+1 \rangle$ 是 $Z_3[x]$ 的极大理想，

证明 3: $Z_3[x]$ 是域上的多项式环，所以是主理想整环， x^2+1 在 Z_3 中无根，

因此是 $Z_3[x]$ 中的不可约元，从而 $\langle x^2+1 \rangle$ 是极大理想

习题 5: 证明对属于 Z_p 的任意 a ，(p 为素数)， x^p+a 在 $Z_p[x]$ 中是可约元，

证明: 因为域 Z_p 的阶为 p ，所以对属于 Z_p 的任意 a ，有 $a^p=a$ ，

因此 $x^p+a = x^p+a^p = (x+a)^p$ 为 $Z_p[x]$ 中可约元，

习题 6 将 $Z_5[x]$ 中多项式 $x^6+\overline{4}x^5+\overline{3}x+\overline{2}$ 表示为不可约元的乘积，

解: 由 $x^5+a=(x+a)^5$ 得

$$x^6+\overline{4}x^5+\overline{3}x+\overline{2} = x^6-x^5+\overline{3}x-\overline{3} = x^5(x-\overline{1})+\overline{3}(x-\overline{1}) = (x-\overline{1})(x^5+\overline{3}) = (x-\overline{1})(x+\overline{3})^5$$

习题 7 验证 $x^3-\overline{2}x^2+x$ 在 Z_5 中有两个不同的根，在 Z_6 中有 4 个互不相同的根，

证明: 设 $f(x) = x^3-\overline{2}x^2+x$ ，在 Z_5 中 $f(\overline{0})=f(\overline{1})=\overline{0}$ ，即在 Z_5 中有两个不同的根；

在 Z_6 中 $f(\overline{0})=f(\overline{1})=f(\overline{3})=f(\overline{4})=\overline{0}$ ，即在 Z_6 中有 4 个互不相同的根，

习题 8 设 p 是一个素数，在 $Z_p[x]$ 中有 $x-\overline{2} \mid x^4-x^3+x^2-x+1$ ，求 p 的可能取值

解: 记 $f(x) = x^4-x^3+x^2-x+1$ ，于是 $f(\overline{2}) = \overline{1}\overline{1} = \overline{0}$ ，从而 $p \mid 11, p=11$ ，

习题 9 写出 $Z_3[x]$ 中全部次数 ≤ 3 的首项系数为 1 的不可约元，

解: 一次不可约多项式有 $x, x \pm 1$ ，由不可约多项式在 $Z_3[x]$ 中无根可知

$$x^2+1, x^2 \pm x-1, x^3+x^2-1, x^3-x+1, x^3-x-1, x^3+x^2+x-1,$$

$$x^3+x^2-x+1, x^3-x^2+x+1, x^3-x^2+1, x^3-x^2-x-1$$

是二次和三次不可约多项式，

习题 10 设 $f(x), g(x)$ 属于 $F[x]$, F 是域，且 $f(x), g(x)$ 不全为零，

令 $J = \{f(x)u(x) + g(x)v(x) \mid u(x), v(x) \in F[x]\}$,

试证明(1) J 是 $F[x]$ 的理想;

(2)若 $d(x)$ 是 $f(x), g(x)$ 的最大公因式，则 $J = \langle d(x) \rangle$,

证明(1)因为 $F[x]$ 是有 1 的交换环，因此 $J = \langle f(x), g(x) \rangle$ 是 $F[x]$ 的理想，

(2)因为 $d(x) \mid f(x), g(x)$ ，所以 $f(x), g(x)$ 属于 $\langle d(x) \rangle$ ，从而 J 包含于 $\langle d(x) \rangle$;

反之，因为 $F[x]$ 是主理想整环，所以 $d(x)$ 属于 J ，

从而 $\langle d(x) \rangle$ 包含于 J ，所以 $J = \langle d(x) \rangle$ ，

习题 11 求整环 $Z[x]$ 的分式域

解: $Z[x]$ 的分式域为 $Q(x) = \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \mid f(x), g(x) \in Z[x], g(x) \neq 0 \right\}$