

1, 设 p 是素数, 求环 $S = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, p \nmid b \right\}$ 的分式域

解: 因为 S 包含于 $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}$ 是最小域, 故 S 的分式域为 $\mathbb{Q}$,

2, 求整环 $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ 的分式域

解: $(c + d\sqrt{2})(a + b\sqrt{2})^{-1} = \frac{(c + d\sqrt{2})(a - b\sqrt{2})}{a^2 - 2b^2}$

因此 $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ 的分式域为 $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$,

3, 求整环 $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}] = \{a + b\sqrt{-3} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ 的分式域,

解: $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ 的分式域为 $\mathbb{Q}[\sqrt{-3}] = \{a + b\sqrt{-3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$,

4, 设域 F 的特征为 0, 证明 F 包含一个同构于有理数域 $\mathbb{Q}$ 的子域

解: 因为 F 的一个子环与整数环同构,

因此, 它们的分式域同构, $\mathbb{Z}$ 的分式域为 $\mathbb{Q}$

所以 $\mathbb{Q}$ 与 F 的一个子域同构