

我们知道有理数集合 $Q = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$

即整数环中任意两个元素的商(除数非零)构成有理数域，

整数环 $\mathbb{Z} = \left\{ \frac{a}{1} \mid a \in \mathbb{Z} \right\}$ 是域 Q 的子环，

本节我们将仿照 $\mathbb{Z}$ 与 Q 的关系，对任意一个整环，构造一个包含该整环的域，

设 R 是整环，令 $\bar{R} = \{(a, b) \mid a, b \in R, b \neq 0\}$ ，即 $\bar{R}$ 是笛卡儿积 $R \times R$ 的子集合，

命题 6.1 若在 R 中定义关系: $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow ad = cb$ ，则 $\sim$ 是 $\bar{R}$ 上的等价关系，

证: 显然， $\sim$ 满足反身性和对称性，下面我们证明 $\sim$ 的传递性，

若 $(a, b) \sim (c, d), (c, d) \sim (s, t)$ ，则 $ad = cb, ct = sd$ ，从而 $adt = cbt = bsd$ ，

又因 $d \neq 0$ ，所以，由整环的消去律可知 $at = sb$ ，即 $(a, b) \sim (s, t)$ ，

也就是说， $\sim$ 满足传递性，因此， $\sim$ 是 $\bar{R}$ 上的等价关系

根据等价关系 $\sim$ 可以给出 $\bar{R}$ 的分类，

若令 $\frac{a}{b}$ 表示以 (a, b) 为代表元的等价类

则存在等价类构成的集合 $F = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in R, b \neq 0 \right\}$

我们知道，当且仅当 $(a, b) \sim (c, d)$ 时，两个等价类相等，即 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

因此，当 $b \neq 0, d \neq 0$ 时， $\Leftrightarrow ad = bc$

那么，对不等于 0 的任意 r ，有 $\frac{a}{b} = \frac{ra}{rb}$

命题 6.2 若利用整环 R 的运算，

将集合 F 上的运算定义为 $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$ 和 $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

则 $\{F; +, \cdot\}$ 是域，称其为整环 R 的分式域，

证: (1) 如上定义的“+”和“ $\cdot$ ”确是 F 上的运算，即定义的运算与代表元的选取无关

若令 $\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1}$ ， $\frac{c}{d} = \frac{c_1}{d_1}$ 则 $ab_1 = a_1b$ ， $cd_1 = c_1d$ ，

从而，

$$(ad+bc)(b_1d_1) = ab_1dd_1 + bb_1cd_1 = a_1bdd_1 + bb_1c_1d = (a_1d_1 + b_1c_1)bd,$$

$$(ac)(b_1d_1) = (ab_1)(cd_1) = (a_1b)(c_1d) = (a_1c_1)(bd),$$

$$\text{这说明 } \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+cb}{bd} = \frac{a_1d_1+c_1b_1}{b_1d_1} = \frac{a_1}{b_1} + \frac{c_1}{d_1}, \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} = \frac{a_1c_1}{b_1d_1} = \frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{c_1}{d_1}$$

即“+”和“ $\cdot$ ”确是 F 上的运算， $\{F; +, \cdot\}$ 是一个有两个运算的代数系统，

(2) $\{F; +\}$ 是加法交换群，

因为 $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+cb}{bd} = \frac{cb+ad}{bd} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$ ，所以加法满足交换律，

$$\text{又因 } \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{s}{t} = \frac{ad+cb}{bd} + \frac{s}{t} = \frac{(ad+cb)t+s(bd)}{(bd)t}, \quad \frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{s}{t}\right) = \frac{a}{b} + \frac{ct+sd}{dt} = \frac{adt+(ct+sd)b}{b(dt)}$$

所以有 $\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{s}{t} = \frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{s}{t}\right)$ ，即加法满足结合律，

当然， $\frac{a}{b} + \frac{0}{1} = \frac{a}{b}$ ， $\frac{a}{b} + \frac{-a}{b} = \frac{0}{b^2} = \frac{0}{1}$ ，所以 $\frac{0}{1}$ 是零元， $\frac{-a}{b}$ 是 $\frac{a}{b}$ 的负元，

(3) $\{F^*; \cdot\}$ 是乘法交换群，其中 $F^* = F - \left(\frac{0}{1}\right)$ ，

因为 $\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{s}{t} = \frac{acs}{bdt} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{s}{t}\right)$ ， $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}$ 所以乘法满足结合律和交换律

对属于 F 的任意 $\frac{a}{b}$ ，有 $\frac{a}{b} \cdot \frac{1}{1} = \frac{a}{b}$ ，即 $\frac{1}{1}$ 是单位元，

又对属于 F^* 的任意 $\frac{a}{b}$ ，有 $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{1}{1}$ ，即 $\frac{a}{b}$ 是可逆元， $\frac{b}{a}$ 是 $\frac{a}{b}$ 的逆元，

注意 $\frac{0}{1} \neq \frac{1}{1}$

(4) 乘法对加法满足分配律:

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{s}{t} = \frac{ad+cb}{bd} \cdot \frac{s}{t} = \frac{(ad+cb)s}{(bd)t} = \frac{asd + cbs}{bdt}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{s}{t} + \frac{c}{d} \cdot \frac{s}{t} = \frac{as}{bt} + \frac{cs}{dt} = \frac{asdt + csbt}{btdt} = \frac{asd + cbs}{bdt}$$

至此， $\{F; +, \cdot\}$ 是域

命题6.3 整环 R 可视为其分式域 F 的子环, 即映射 $\varphi: R \rightarrow F, a \rightarrow \frac{a}{1}$ 是环的单同态

证: 首先, 映射 φ 保持运算:

$$\varphi(a+b) = \frac{a+b}{1} = \frac{a}{1} + \frac{b}{1} = \varphi(a) + \varphi(b)$$

$$\varphi(a \cdot b) = \frac{a \cdot b}{1} = \frac{a}{1} \cdot \frac{b}{1} = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$$

其次, 当 $\frac{a}{1} = \frac{0}{1}$ 时, 必有 $a = 0$, 所以 φ 是环的单同态

也就是说, 我们可以视 R 为 F 的子环,

由此, 我们可以将 F 的元素 $\frac{a}{1}$ 与 R 的元素 a 等同起来, 并记 $\frac{a}{1} = a$

而对属于 F 的 $\frac{1}{b}$, 由 $\frac{b}{1} \cdot \frac{1}{b} = \frac{1}{1}$ 可知 $\frac{1}{b} = \left(\frac{b}{1}\right)^{-1} = b^{-1}$

那么对属于 F 的任意 $\frac{a}{b}$, 我们有 $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b} = a \cdot b^{-1}$

因此, 分式域又可以写作集合 $F = \{ab^{-1} | a, b \in R, b \neq 0\}$,

定理 6.1 整环 R 的分式域 F 是包含 R 的最小域,

证: 设 $\bar{F}$ 是包含 R 的域, 且 $\bar{F}$ 包含于 F ,

因为对属于 R 的任意 $a, b, b \neq 0$, 有 a, b 属于 $\bar{F}$, ab^{-1} 属于 $\bar{F}$, 从而, F 包含于 $\bar{F}$,

得 $\bar{F} = F$

所以, 整环 R 的分式域是包含 R 的最小域,

定理 6.2 设 F, F' 分别是整环 R, R' 的分式域，

若 φ 是 R 到 R' 的环同构，则存在 F 到 F' 的域同构 τ ，且 $\tau|_R = \varphi$ ，

证： 对属于 R 的任意 $a, b, b \neq 0$ ，我们定义 $\tau: F \rightarrow F', ab^{-1} \rightarrow \varphi(a)\varphi(b)^{-1}$ ，

显然， τ 是 F 到 F' 的双射，事实上， τ 也保持运算，

对属于 R 的 $a_1, a_2, b_1, b_2, b_1 \neq 0, b_2 \neq 0$ 有

$$\begin{aligned} & \tau(a_1b_1^{-1} + a_2b_2^{-1}) \\ &= \tau((a_1b_2 + a_2b_1)(b_1b_2)^{-1}) = \varphi(a_1b_2 + a_2b_1)[\varphi(b_1b_2)]^{-1} \\ &= [\varphi(a_1)\varphi(b_2) + \varphi(a_2)\varphi(b_1)][\varphi(b_1)\varphi(b_2)]^{-1} \\ &= [\varphi(a_1)\varphi(b_2) + \varphi(a_2)\varphi(b_1)]\varphi(b_2)^{-1}\varphi(b_1)^{-1} \\ &= \varphi(a_1)\varphi(b_1)^{-1} + \varphi(a_2)\varphi(b_2)^{-1} = \tau(a_1b_1^{-1}) + \tau(a_2b_2^{-1}), \\ & \tau((a_1b_1^{-1})(a_2b_2^{-1})) \\ &= \tau((a_1a_2)(b_1b_2)^{-1}) = \varphi(a_1a_2)[\varphi(b_1b_2)]^{-1} \\ &= [\varphi(a_1)\varphi(a_2)][\varphi(b_1)\varphi(b_2)]^{-1} \\ &= [\varphi(a_1)\varphi(a_2)]\varphi(b_2)^{-1}\varphi(b_1)^{-1} \\ &= [\varphi(a_1)\varphi(b_1)^{-1}][\varphi(a_2)\varphi(b_2)^{-1}] \\ &= \tau(a_1b_1^{-1})\tau(a_2b_2^{-1}), \end{aligned}$$

所以， τ 是 F 到 F' 的域同构，

因为 $\varphi(1)$ 是 R' 的单位元，

所以对属于 R 的任意 a 有 $\tau(a) = \tau\left(\frac{a}{1}\right) = \frac{\varphi(a)}{\varphi(1)} = \varphi(a)$ ，即 $\tau|_R = \varphi$ ，

定理 6.2 说明： 整环 R 的分式域在同构意义下是唯一的，

例 6.1 易知，整数环 $\mathbb{Z}$ 的分式域是有理数域，域 F 的分式域是它本身，

而数域 F 上的一元多项式环 $F[x]$ 的分式域为

$$F(x) = \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \mid f(x), g(x) \in F[x], g(x) \neq 0 \right\}$$

例 6.2 求高斯整环 $Z[i]=\{a+bi|a, b \text{ 属于 } Z\}$ 的分式域 ,

解: 因为 $Z[i]$ 包含于 C , 且在复数域 C 中 , 有

$$(c + di)^{-1} = \frac{c - di}{c^2 + d^2}$$

和

$$(a + bi)(c + di)^{-1} = \frac{(a + bi)(c - di)}{c^2 + d^2} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}$$

所以 , $Z[i]$ 的分式域为 $Q[i]=\{a+bi|a, b \in Q\}$,