1，求环$\left\{\begin{pmatrix}0 & 0\\ x & y\end{pmatrix}\middle|\ x,y\in R\right\}$的所有左零因子、右零因子及零因子

解: 设$\begin{pmatrix}0 & 0\\ x_1 & y_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ x_2 & y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，从而$y_1x_2=0$且$y_1y_2=0$，

若$y_1=0$，$x_1\neq0$，则$\begin{pmatrix}0 & 0\\ x_1 & y_1\end{pmatrix}$是左零因子，$\begin{pmatrix}0 & 0\\ x_2 & y_2\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$是右零因子，

从而零因子为$\begin{pmatrix}0 & 0\\ x & y\end{pmatrix}$，其中x，y不同时为零

2，求实数域R上矩阵环$M_n(R)$中的全部零因子，

解: 在$M_n(R)$中，若$A\neq0$，则$AX=0$在$M_n(R)$中有非零解$\Leftrightarrow|A|=0$，

同样的，$YA=0$在$M_n(R)$中有非零解$\Leftrightarrow|A|=0$，

所以$M_n(R)$的零因子为$\{A\in M_n(R)|A\neq0,|A|=0\}$，

3，设R是无零因子环，证明若方程$x^2=x$在R中有非零解，则R有单位元，

证明: 设r是$x^2=x$在R中的非零解，则$r^2=r$，

对属于R的任意a，令$ra=b$，则$ra=r^2a=rb$，

因R是无零因子环，所以在R中消去律成立，那么$a=b$，即$ra=a$，

同理可证$ar=a$，所以r是R的单位元，

4，证明Z_6的子环$\{\overline{0},\overline{3}\}$是域

证明: Z_6的子环$\{\overline{0},\overline{3}\}$是交换环，

因为$\overline{0}\bullet\overline{3}=\overline{0}$，$\overline{3}\bullet\overline{3}=\overline{3}$，所以，$\overline{3}$是单位元，$\overline{3}$的逆元是$\overline{3}$，

故$\{\overline{0},\overline{3}\}$为域

5，设 R=$\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in Q\right\}$，证明 R 关于矩库的加法运算和乘法运算构成环，并判断 R 是否是交换环，R 是否是有单位元的环，R 是否是整环，R 是否是域

证明: 设$\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} c & d \\ 2d & c \end{pmatrix} \in R$

因为$\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c & d \\ 2d & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a-c & b-d \\ 2b-2d & a-c \end{pmatrix} \in R$

$\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ 2d & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ac+2bd & ad+bc \\ 2bc+2ad & 2bd+ac \end{pmatrix} \in R$

所以 R 是环，

因为$\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ 2d & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c & d \\ 2d & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}$，所以 R 是交换环

R 的单位元为$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

若$\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ 2d & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，则 a=b=0 或 c=d=0，

故 R 无零因子，所以 R 是整环，

若$\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$则$\begin{vmatrix} a & b \\ 2b & a \end{vmatrix} = a^2 - 2b^2 \neq 0$，从而$\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}$可逆，

所以 R 是域，

6，证明 Q[$\sqrt{5}$]={a+b$\sqrt{5}$ | a，b ∈ Q}是域，

证明: 只需说明 Q[$\sqrt{5}$]是 C 的子域，

由于(a+b$\sqrt{5}$)−(c+d$\sqrt{5}$) ∈ Q[$\sqrt{5}$]，

$(a+b\sqrt{5})(c+d\sqrt{5})^{-1}= \frac{ac-5bd+(bc-ad)\sqrt{5}}{c^2-5d^2} \in Q[\sqrt{5}]$，

故 Q[$\sqrt{5}$]是 C 的子域

7，证明域与其子域的特征相等，

证明: 因为群与其子群有相同的单位元，所以它们的特征相同，

8，设 F 是有四个元素的域，证明

(1)F 的特征是 2;

(2)属于 F 的不等于 0，1 的两个元素使方程 $x^2=x+1$ 成立，

证明: (1)F 的特征数是素数，且为 4 的因数，所以 F 的特征是 2，

(2)因为|F|=4，所以若$\alpha\neq0$，1，则$\alpha^3=1$，$(\alpha-1)(\alpha^2+\alpha+1)=0$，

因为域无零因子，所以$\alpha^2+\alpha+1=0$，从而有$\alpha^2=\alpha^2+2\alpha+2=\alpha+1$，

9，设 F 是域，问 F 的子集{0，1}是否一定是 F 的子域?

解: 若{0，1}是域，则

0–0=0，0–1=–1，1–1=0，1–0=1，0▪1=0，1▪1=1 都在{0，1}中，即 1=–1，

此时要求 F 的特征为 2，

因此当 F 的特征不等于 2 时{0，1}不是域

10，设 F 是特征 p 的域，其中 p 大于 0，

试证明在 F 中有$(a\pm b)^{p^n}=a^{p^n}\pm b^{p^n}$，其中 n 是正整数

证明: 对 n 用数学归纳法，

当 n=1 时，由二项式定理知$(a\pm b)^{p^n}=a^{p^n}\pm b^{p^n}$

假设结论对 n–1 成立，那么

$(a\pm b)^{p^n}$

$=\left[(a\pm b)^{p^{n-1}}\right]^p$

$=\left(a^{p^{n-1}}\pm b^{p^{n-1}}\right)^p$

$=a^{p^n}\pm b^{p^n}$

11，证明除环的中心是域，并求四元数体的中心，

证明: 设 R 是除环，因为 1 属于 C(R)，

所以 R 的中心 C(R)是有 1 的，非 0 的交换的子环，它的非零元都可逆，

所以除环的中心是域，

四元数体的中心为$\left\{\lambda\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\middle|\lambda\in R\right\}$

12，证明非零的、有 1 的、无零因子的有限环是除环，

证明: 只需说明 R^*是乘法群，

由于 R 是无零因子环，从而 R^*中消去律成立，

又因 R^*是有限半群，因此 R^*是群，故 R 是一个除环，

习题 1 证明 A=$\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & 0\end{pmatrix}\middle| a,b\in R\right\}$

关于矩阵的加法和乘法构成一个无单位元的环，并求 A 的零因子，

证明: 因为$\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}c & d\\ 0 & 0\end{pmatrix}$=$\begin{pmatrix}a-c & b-d\\ 0 & 0\end{pmatrix}\in A$

$\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c & d\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ac & ad\\ 0 & 0\end{pmatrix}\in A$

所以 A 是 $M_2(R)$的子环，且无单位元

$\left\{\begin{pmatrix}x & y\\ 0 & 0\end{pmatrix}\middle| x^2+y^2\neq 0\right\}$为右零因子，

$\left\{\begin{pmatrix}0 & x\\ 0 & 0\end{pmatrix}\middle| x\in R, x\neq 0\right\}$为左零因子

习题 2 设 R 是有 1 的无左零因子环，

试证明: 若 ab=1，则 ba=1，其中 a，b 属于 R，

证明: 由于(ba–1)b=bab–b=b–b=0，而 R 无左零因子且 b≠0，

由此 ba–1=0，即 ba=1，

习题 3 证明: $M_n(Z)$中每一个左零因子都是右零因子，

证明: 设 A 是左零因子，则存在 Z 上不等于 0 的方阵 B 使得 AB=0，

这表明 B 的每一列都是齐次线性方程组 AX=0 的解，

由于 B≠0，它有非零解，故 0＜秩 A=r＜n，

但是秩 A^T=秩 A=r，故方程组 $A^TX=0$ 有非零解，

任取其一非零整数解 $c_1, c_2, \cdots, c_n$，令 $C=\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \neq 0$

则 $A^TC^T=0$，两边作转置，得 CA=0，即 A 也是一个右零因子，

习题 4 设 F 是特征 p 的域，其中 p>0，证明在 F 中以下等式成立:

(1)$(a \pm b)^{p^n}=a^{p^n} \pm a^{p^n}$ ，n 是正整数;

(2)$(a-b)^{p-1}=\sum_{i=0}^{p-1} a^i b^{p-i-1}$

证明: (1)参见[习题 3.2 题 10]，

(2)当 $a=b$ 时, 我们有$\sum_{i=0}^{p-1} a^i b^{p-i-1}=pa^{p-1}=0$, 故$(a-b)^{p-1}=\sum_{i=0}^{p-1} a^i b^{p-i-1}$

当 $a \neq b$ 时, 我们有$(a-b)\sum_{i=0}^{p-1} a^i b^{p-i-1}=a^p-b^p=(a-b)^p$

因为 $a-b \neq 0$, 根据消去律, 由上式可得$(a-b)^{p-1}=\sum_{i=0}^{p-1} a^i b^{p-i-1}$

习题 5 设 R 是环，存在属于 R 且不为 0 的 a，b，使得 aba=0

试证明 a 是左零因子或右零因子，

证明: 如果 ab=0，则 a 是一个左零因子，否则 a 是右零因子，

习题 6 证明环 $Z[\sqrt{-3}]=\{a+b\sqrt{-3} \mid a,b\in Z\}$是整环但不是域，

证明: 对属于 $Z[\sqrt{-3}]$的任意α,β，有$\alpha-\beta,\alpha\beta$属于 $Z[\sqrt{-3}]$，

因此，$Z[\sqrt{-3}]$是有 1、无零因子的交换环，因此是整环，

由于除$\{\pm1\}$外所有非零元都不可逆，所以不是域，

习题 7 求 Q 的全部子域，

解: 若 F 是 Q 的子域，则 0，1 属于 F，

从而对属于 Z 的 n，有 $n=n\bullet1$ 属于 F，即 Z 包含于 F，

从而对属于 Z 的 m，n，有$\frac{n}{m}$属于 F，其中 $m\neq0$，即 Q 包含于 F，

所以 Q 的子域只有 Q

习题 8 求证 $Q[\sqrt{2}]=\{a+b\sqrt{2} \mid a,b\in Q\}$是 R 的子域

证明: 因为

$(a+b\sqrt{2})-(c+d\sqrt{2})=a-c+(b-d)\sqrt{2}\in Q[\sqrt{2}]$，

$$(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2})^{-1}=\frac{ac-2bd}{c^2-2d^2}+\frac{bc-ad}{c^2-2d^2}\sqrt{2}\in Q[\sqrt{2}]$$

所以 $Q[\sqrt{2}]$是 R 的子域，

习题 9 在 $Z\times Z$ 中定义加法与乘法如下:

$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$,

$(a,b)(c,d)=(ac,bd)$，其中任意(a,b),(c,d)属于 $Z\times Z$,

试证明 $Z\times Z$ 是有零因子、有 1 的交换环，

证明: 因为

$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)=(c,d)+(a,b)$,

$((a,b)+(c,d))+(e,f)=(a+c+e,b+d+f)=(a,b)+((c,d)+(e,f))$,

$(a,b)+(0,0)=(a,b)$,

$(a,b)+(-a,-b)=(0,0)$,

所以$\{Z\times Z;+\}$是交换群，

又由$(a,b)(c,d)=(ac,bd)=(c,d)(a,b)$,

$((a,b)(c,d))(e,f)=(ace,bdf)=(a,b)((c,d)(e,f))$,

$(a,b)(1,1)=(a,b)$,

$((a,b)+(c,d))(e,f)=((a+c)e,(b+d)f)=(a,b)(e,f)+(c,d)(e,f)$,

知 $Z\times Z$ 是有 1 的交换环，

再由$(a,0)(0,b)=(0,0)$知 $Z\times Z$ 是有零因子的环，

习题 10 设α是四元数体 H 中的元素，且$\alpha^2=-e$，证明

(1)$a=ai+bj+ck$，其中 a , b , c 属于 R , $a^2+b^2+c^2=1$;

(2)存在属于 H 的δ，使得$\delta\alpha\delta^{-1}=i$,

证明: (1)设$\alpha=ai+bj+ck+de$，于是$\alpha^2=2adi+2bdj+2cdk+(d^2-a^2-b^2-c^2)e$,

因为$\alpha^2=-e$，所以 $d=0$, $a^2+b^2+c^2=1$,

(2)当$\alpha=i$ 取$\delta=e$ 即可，当$\alpha=-i$ 取$\delta=-j$ 即可，

若$\alpha\neq-i$，则$\alpha+i$ 可逆，取$\delta=(\alpha+i)^{-1}$,

于是$\delta\alpha\delta^{-1}=(\alpha+i)^{-1}\alpha(\alpha+i)=(\alpha+i)^{-1}(-e+\alpha i)=(\alpha+i)^{-1}(i+\alpha)i=i$,