1，证明$\langle\overline{2}\rangle$是 Z_{18} 的极大理想

证明: Z_{18} 的所有理想为

Z_{18}，

$\overline{2}Z_{18}=\{\overline{0}，\overline{2}，\overline{4}，\overline{6}，\overline{8}，\overline{10}，\overline{12}，\overline{14}，\overline{16}\}$，

$\overline{3}Z_{18}=\{\overline{0}，\overline{3}，\overline{6}，\overline{9}，\overline{12}，\overline{15}\}$，

$\overline{6}Z_{18}=\{\overline{0}，\overline{6}，\overline{12}\}$，

$\overline{9}Z_{18}=\{\overline{0}，\overline{9}\}$，

$\overline{18}Z_{18}=\{\overline{0}\}$，

显然包含$\langle\overline{2}\rangle$的理想只有$\langle\overline{2}\rangle$和 Z_{18}, 故$\langle\overline{2}\rangle$为 Z_{18} 的极大理想 ，

2，证明$\langle\sqrt{2}\rangle$是环 $Z[\sqrt{2}]=\{a+b|a, b\in Z\}$的极大理想 ，

证明: 因为$\langle\sqrt{2}\rangle=Z[\sqrt{2}]\sqrt{2}=\{(a+b\sqrt{2})\sqrt{2}|a, b\in Z\}=\{\sqrt{2}b+\sqrt{2}a|a, b\in Z\}$

所以对属于 $Z[\sqrt{2}]$的任意 $a+b\sqrt{2}$ ，

若 a 为偶数 ，则 $a+b\sqrt{2}$属于$\langle\sqrt{2}\rangle$，即$\overline{a+b\sqrt{2}}=\overline{0}$ ，

若 a 为奇数 ，则 $a+b\sqrt{2}=1+(a-1+b\sqrt{2})$，即 $a+b\sqrt{2}+\langle\sqrt{2}\rangle=\overline{1}$ ，

故 $Z[\sqrt{2}]/\langle\sqrt{2}\rangle=\{\overline{0}，\overline{1}\}$，即 $Z[\sqrt{2}]/\langle\sqrt{2}\rangle$是域 ，

所以$\langle\sqrt{2}\rangle$是环 $Z[\sqrt{2}]$的极大理想 ，

3，设 R 是有 1 的交换环，I 是 R 的真理想，

试证明若 R 的每个不在 I 中的元素都是可逆元，则 I 是 R 的唯一极大理想，

证明: 因为 I 是 R 的真理想，

所以 1 不属于 I，R/I 中有两个不同元素$\overline{0}=0+I$，$\overline{1}=1+I$，

因为 R−I 中任意元素均可逆，从而 R/I 是域，因此 I 是 R 的极大理想，

若 J 是 R 的另一个极大理想，I≠J，则存在 a 属于 J−I，

又因 a 可逆，从而⟨a⟩=R，J=R，与 J 是极大理想矛盾，

所以 I 是 R 的唯一极大理想

4，证明在一元多项式环 Q[x]中，由 x 生成的理想是 Q[x]的极大理想，

证明: 定义映射$\varphi: Q[x] \to Q$, $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \to f(0) = a_0$，则$\varphi$是满射

且易知$\varphi(f(x)+g(x))=\varphi(f(x))+\varphi(g(x))$，

$\varphi(f(x))\varphi(g(x))=\varphi(f(x)g(x))$，

即φ是一个同态映射，

又因 f(x)属于 Ker $\varphi \Leftrightarrow \varphi(f(x))=0 \Leftrightarrow a_0=0 \Leftrightarrow$ Ker $\varphi=\langle x\rangle$，所以 Ker $\varphi=\langle x\rangle$，

由环同态基本定理知 $Q[x]/\mathrm{Ker}\varphi \cong Q$，即 $Q[x]/\mathrm{Ker}\,\varphi$是域，

故$\langle x\rangle=\mathrm{Ker}\,\varphi$是 Q[x]的极大理想，

5，设 p 是素数，问在偶数环 2Z 中，⟨2p⟩是否是极大理想?

解: 设 I 是真包含⟨2p⟩的 2Z 的理想，则存在属于 Z 的 m，使 2m 属于 I−⟨2p⟩，

从而(p，m)=1，

因此存在整数 s，i 使得 sp+im=1，从而 2sp+2tm=2 属于 I，

因此 I=2Z，故⟨2p⟩是极大理想，

6，试证明 $S=\{ab^{-1} \mid b=2n+1, a, n\in Z\}$有唯一极大理想，

证明: S 的单位群 $U(S)=\{ab^{-1} \mid a=2m+1, b=2n+1, m, n\in Z\}$，

易知，I=S−U(S)是 S 的真理想，

由题 3 可知 I 是 S 的唯一极大理想

7，问在整数环 Z 中，$\langle 71\rangle$是否是 Z 的素理想? $\langle 9\rangle$是否是 Z 的素理想?

解: $Z/\langle 71\rangle=Z_{71}$是整环，所以$\langle 71\rangle$是 Z 的素理想

$Z/\langle 9\rangle=Z_9$不是整环，所以$\langle 9\rangle$不是 Z 的素理想

8，试证明当 m 是合数时，Z_m的所有素理想形式为$\bar{s}Z_m$，其中 s 是 m 的素因子;

当 m 是素数时，Z_m的素理想只有$\{\bar{0}\}$，

证明: 对于 Z_m，当 m 为素数时，理想只有$\{\bar{0}\}$和 Z_m，

所以$\{\bar{0}\}$既是素理想又是极大理想;

当 m 为合数时，其所有理想为$\langle\bar{s}\rangle$，s 是 m 的正因子，

若$\langle\bar{s}\rangle$包含于$\langle\bar{t}\rangle$，则 t|s，因此$\langle\bar{s}\rangle$是极大理想$\Leftrightarrow$s 素是因子，

而主理想整环中极大理想与素理想等价，

因此，当 m 是合数时，Z_m的所有素理想形式为$\bar{s}Z_m$，其中 s 是 m 的素因子，

9，分别求 Z_6 和 Z_{13} 的所有极大理想和素理想，

解: Z_6的极大理想和素理想都为$\langle\bar{2}\rangle$和$\langle\bar{3}\rangle$，Z_{13}的极大理想和素理想都是$\{\bar{0}\}$，

10，在 Z[i]中，判断下列哪些理想是素理想，哪些理想是极大理想，
并说明理由

(1)$\langle 3\rangle$;　　　　(2)$\langle 2+3i\rangle$;　　　　(3)$\{0\}$，

解: (1)因为$\langle 3\rangle=3Z[i]$，

所以 $Z[i]/\langle 3\rangle=\{\bar{0}，\bar{1}，\bar{2}，\bar{i}，\overline{1+i}，\overline{2+i}，\overline{2i}，\overline{1+2i}，\overline{2+2i}\}$，

又因非零元可逆: $(\bar{2})^{-1}=\bar{2}$，$(\bar{i})^{-1}=\overline{2i}$，$(\overline{1+i})^{-1}=\overline{2+i}$，$(\overline{1+2i})^{-1}=\overline{2+2i}$，

所以 $Z[i]/\langle 3\rangle$是域，因此$\langle 3\rangle$是极大理想，也是素理想

(2)$\langle 2+3i\rangle$是极大理想和素理想，

(3)$\langle 3\rangle$是素理想但不是极大理想，

11，设 R 与 R'是交换环，φ是 R 到 R'的环同态，试证明

(1)若 I'是 R'的素理想，则$\varphi^{-1}(I')$是 R 的素理想;

(2)若 I 是 R 的素理想，φ是满同态且 Ker φ包含于 I，则φ(I)是 R'的素理想，

证明: (1)若 ab 属于$\varphi^{-1}(I')$，则φ(ab)属于 I'，φ(a)φ(b)属于 I'，

由于 I'为素理想，从而φ(a)属于 I'或φ(b)属于 I'，

因此 a 属于$\varphi^{-1}(I')$，或 b 属于$\varphi^{-1}(I')$，

(2)若φ(a)φ(b)属于φ(I)，则φ(ab)属于φ(I)，

从而存在属于 I 的 i，使得 ab−i 属于 Ker φ，ab 属于 I，因此 a 属于 I 或 b 属于 I

于是φ(a)属于φ(I)或φ(b)属于φ(I)，故φ(I)是 R'的素理想，

12，设 R 是一个交换环，I，J 是 R 的两个理想，且 I 包含于 J，

试证明若 J/I 是 R/I 的素理想，则 J 是 R 的素理想

证明: 若 ab 属于 J，则(a+I)(b+I)属于 J/I，

因为 J/I 是 R/I 的素理想，所以 a+I 属于 J/I 或者 b+I 属于 J/I，

即 a 属于 J 或 b 属于 J，故 J 为 R 的素理想，

13，设 R 是一个交换环，P 是 R 的真理想，

试证明当且仅当对 R 的任意两个理想 I，J，

若 IJ 包含于 P，则有 I 包含于 P 或 J 包含于 P 时，P 是 R 的素理想

证明: 必要性，反证，假设存在属于 I 的 i，和属于 J 的 j，使得 i，j 不属于 P，

则 ij 属于 IJ 包含于 P，这与 P 是 R 的素理想矛盾，

充分性，若 ab 属于 P，则令 I=⟨a⟩，J=⟨b⟩，从而 IJ=⟨ab⟩，那么 IJ 包含于 P，

于是有 I 包含于 P 或 J 包含于 P，

因此有 a 属于 P，b 属于 P，所以 P 是 R 的素理想，

14，设 I 是交换环 R 的理想，S 是 R 中一切不属于 I 的元素的集合，

试证明当且仅当 S 关于 R 的乘法运算是半群(即 S 的乘法运算满足结合律)时，

I 是环 R 的素理想

证明: 必要性，

I 是 R 的素理想，$S=R-I$，因为 I 是环 R 的真理想，所以 S 是非空集合，

对属于 S 的 s_1，s_2，若 s_1s_2 属于 I，则 s_1 属于 I 或 s_2 属于 I，矛盾，

所以 s_1s_2 属于 S，

因为环 R 的乘法满足结合律，所以子集 S 的乘法也满足结合律，

故 s 关于 R 的乘法运算是半群，

充分性，

反证，存在属于 R 的 x，y，使得 xy 属于 I，但是 x 不属于 I，y 不属于 I，

即 x 属于 S，y 属于 S，但是 xy 不属于 S，

这与 S 关于 R 的乘法运算是半群矛盾，故 I 为素理想，

习题 1 举例说明:

在主理想整环中，零理想一定是素理想，但不一定是极大理想

解: 因为整环是无零因子环，因此零理想一定是素理想，

在整数环中，零理想是素理想，但不是极大理想，

习题 2 设 p 是一个素数 ，n 是大于 1 的整数 ，$R=Z/\langle p^n\rangle$，试证明

(1)R 的元素不是可逆元就是幂零元;

(2)$\langle\overline{p}\rangle$是 R 的极大理想;

(3)R 只有一个素理想;

(4)若 I 是 R 的素理想 ，则商环 R/I 是域 ，

证明: (1)令 a 属于 Z，若 $p\nmid a$，则$(a,p^n)=1$，

于是存在属于 Z 的 u,v，使得 $ua+vp^n=1$，从而$\overline{ua}=\overline{1}$ ，即$\overline{a}$是可逆元 ，

否则 ，可设 $a=pt$(t 属于 Z)，则$\overline{a}^n=\overline{0}$ ，即$\overline{a}$是幂零元 ，

(2)设 J 是 R 的理想 ，且$\langle\overline{p}\rangle\subseteq J\subseteq R$，若存在属于 J 的可逆元$\overline{a}$ ，则$\langle\overline{a}\rangle=J=R$，否则 ，属于 J 的任意$\overline{a}$不是可逆元 ，

则由(1)可设 $a=pt$(t 属于 Z)，故 $a=\overline{pt}$属于$\langle\overline{p}\rangle$，从而$\langle\overline{p}\rangle=J$，

(3)设 I 是 R 的素理想 ，由于$\overline{p}^n=\overline{0}$属于 I，故$\overline{p}$属于 I，所以$\langle\overline{p}\rangle$包含于 I，

又由(2)知$\langle\overline{p}\rangle$是极大理想 ，故$\langle\overline{p}\rangle=I$，

(4)由于 I 是极大理想 ，故 R/I 是域 ，

习题 3 设 R 和 R_1 都是交换环 ，φ: $R\to R_1$ 是环同态映射 ，

J 是 R_1 的极大理想 ，问 $I=\varphi^{-1}(J)$一定是 R 的极大理想吗?

解: 不一定 ，

例如在嵌入映射 $Z\to Q$ 下 ，因为域是单纯环 ，因此 Q 的极大理想为 $J=\{0\}$，而其完全原像为 $I=\{0\}$，不是 Z 的极大理想 ，

习题 4 设 R 是交换环，$I_j(1\leqslant j\leqslant n)$是 R 的理想，I 是 R 的素理想，试证明

(1)若$\bigcap_{j=1}^{n} I_j = I$, 则 I 必等于某个$I_j$

(2)若$\bigcap_{j=1}^{n} I_j \subseteq I$ 且$I_j(1\leqslant j\leqslant n)$是素理想, 则 I 包含某个$I_j$

证明: (1)反证，假设 I_j 不包含于 $I(1\leqslant j\leqslant n)$，取 a_j 属于 I_j–I，

则$a_1a_2\cdots a_n$属于$\bigcap_{j=1}^{n} I_j = I$,

因为 I 是 R 的素理想，所以存在某个 a_j 属于 I，矛盾，

(2)反证. 取属于$I_j - I$ 的a_j, $j = 1,2,\cdots,n$, 则$a_1a_2\cdots a_n$属于$\bigcap_{j=1}^{n} I_j - I$，矛盾

习题5设 R 是交换环, I 是 R 的理想, $I_i(1\leqslant j\leqslant n)$是 R 的素理想, 且 $I \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} I_j$

试证明 I 包含在某个 I_j 中，

证明: 对 n 用数学归纳法，n=1 时结论显然成立，

假设结论对 n–1 成立，

设 $I \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} I_j$, 若存在 i 使得$I_i \subseteq \bigcup_{j\neq i}^{n} I_j$, 则 $I \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} I_j = \bigcup_{j\neq i}^{n} I_j$

由归纳假设知，I 含在某个 I_i 中，

否则, 取$x_k \in I_k - \bigcup_{j\neq i}^{n} I_j$, $k = 1,2,\cdots,n$,

假若 I 不包含于I_j, 取$a_j \in I - I_j$, $j = 1,2,\cdots,n$, 则$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \notin \bigcup_{j\neq i}^{n} I_j$

矛盾

习题 6 证明有 1 的有限交换环的素理想都是极大理想，

证明: 设 R 是有 1 的有限交换环，I 是 R 的素理想，则 R/I 是有限整环，

从而是域，故 I 是 R 的极大理想，

习题 7 求 Z_{18} 的素理想，

解: Z_{18} 的素理想为 $\langle\bar{s}\rangle$，其中 s 是 18 的素因子，所以 Z_{18} 的素理想只有 $\langle\bar{3}\rangle$ 和 $\langle\bar{2}\rangle$，

习题 8 证明 $\langle 2+i\rangle$ 是 $Z[i]$ 的素理想，

证明: 因为 $Z[i]$ 是有 1 的交换环，且 $Z[i]/\langle 2+i\rangle=\{\bar{0}，\bar{1}，\bar{2}，\bar{3}, \bar{4}\}$，易知其是域

所以 $\langle 2+i\rangle$ 是 $Z[i]$ 的极大理想，也是素理想，

习题 9 证明 1–i 生成的理想是 $Z[i]$ 的极大理想，

证明: 因为 $Z[i]$ 是有 1 的交换环，所以仅需要证明 $Z[i]/\langle 1-i\rangle$ 是域，

因为 $(a+bi)(1-i)=a+b+(b-a)i$，令 $b-a=x$，则 $\langle 1-i\rangle=\{2a+x+xi|a, x\in Z\}$，

若 a–b 是偶数，则 $\overline{a+bi}=\bar{0}$;

若 a–b 是奇数，则 a–1–b 是偶数，$\overline{a-1+bi}=\bar{0}$，$\overline{a+bi}=\bar{1}$，

从而 $Z[i]/\langle 1-i\rangle=\{\bar{0}，\bar{1}\}$ 是域，$\langle 1-i\rangle$ 是 $Z[i]$ 的极大理想

习题 10 设 p 是素数，在整数环 Z 中，$\langle p^2\rangle$ 是否是 Z 的素理想?

解: 当且仅当 a 是素数或零时，$\langle a\rangle$ 是 Z 的素理想，所以 $\langle p^2\rangle$ 不是 Z 的素理想，