

1, 令 V 是数域 F 上的 $n(n \geq 2)$ 维线性空间 ,
 $\text{End}_n(V)$ 表示 V 上全体线性变换组成的集合 ,
 试证明 $\text{End}_n(V)$ 关于线性变换的加法运算和乘法运算构成有单位元的环 ,
证明: (1) 由于 V 的两个线性变换的和与积仍是 V 的线性变换 ,
 因此线性变换的加法与乘积是 $\text{End}_n(V)$ 的代数运算 ,
 (2) 线性变换的加法满足结合律和交换律 ,
 (3) 零变换 0 是加法的零元
 (4) 线性变换 $A, -A$ 是 V 的线性变换 , 且 $A+(-A)=(-A)+A=0$,
 所以 $\text{End}_n(V)$ 中每个元素都有负元 ,
 (5) 恒等变换 ε 是线性变换 , 且对任一线性变换 A , 有 $\varepsilon A = A\varepsilon = A$,
 所以恒等变换是线性变换的乘法单位元 ,
 (6) 线性变换的乘法满足结合律 ,
 (7) 当 $n \geq 2$ 时 , 线性变换的乘法不满足交换律 ,
 (8) 线性变换的乘法对加法满足左、右分配律 ,
 所以 $\text{End}_n(V)$ 关于线性变换的加法与乘法构成一个有单位元的非交换环 ,

2, 试证明当且仅当 a 与 n 互素时 , 剩余类环 $\{Z_n; +, \cdot\}$ 中的元素 $\bar{a}$ 是可逆元

证明:

必要性 ,

若 $\bar{a}$ 是可逆元 , 则存在属于 Z_n 的 $\bar{b}$, 使得 $\bar{a}\bar{b} = \bar{1}$, 即 $ab = 1 + qn$,

从而存在属于 Z 的 q , 使得 $ab + qn = 1$, 因此 $(a, n) = 1$,

充分性 ,

因为 $(a, n) = 1$, 所以存在属于 Z 的 b, c , 使得 $ab + cn = 1$, 从而 $\bar{a}\bar{b} = \bar{1}$,

故 $\bar{a}$ 是可逆元 ,

3, 令 $\alpha = a + bi$ (a, b 都属于 R) , $N(\alpha) = a^2 + b^2$,

试证明对属于 C 的任意 α, β , 有 $N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$,

证明: 设 $\alpha = a_1 + b_1i$, $\beta = a_2 + b_2i$,

则 $N(\alpha\beta) = (a_1a_2 - b_1b_2)^2 + (a_1b_2 + a_2b_1)^2 = (a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) = N(\alpha)N(\beta)$

4, 设 R 是交换环, $M_n(R)$ 表示元素在 R 中的 n 阶方阵的集合,

试证明 $M_n(R)$ 按照通常的矩阵加法运算和乘法运算是环,

证明: 因为 R 是交换环, 所以矩阵的加法运算满足结合律、交换律,

$M_n(R)$ 的零矩阵是零元, $A=(a_{ij})$ 的负元为 $-A=(-a_{ij})$,

从而 $M_n(R)$ 关于加法运算构成群,

由于 R 是交换环, 所以 $M_n(R)$ 的乘法运算满足结合律,

且乘法运算对加法运算满足分配律, 故 $M_n(R)$ 是环,

5. 设 $H_i (i \in I)$ 是环 R 的子环, 试证明 $\bigcap_{i \in I} H_i$ 是 R 的子环

证明: 因为 0 属于 H_i , 所以 $\bigcap_{i \in I} H_i$ 是非空集合

对属于 $\bigcap_{i \in I} H_i$ 的任意 a, b , 有 $a - b, ab$ 都属于 $\bigcap_{i \in I} H_i$, 因此, $\bigcap_{i \in I} H_i$ 是 R 的子环

6, 设 $R = \{ \frac{a}{b} \mid b=2n+1, a, n \text{ 都属于 } Z \}$,

试证明 R 按照数的加法运算和乘法运算构成环,

证明: 对属于 R 的任意 $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$, 其中 a, b, c, d 都属于 Z , 且 b, d 是奇数,

则既有 $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}$ 属于 R , 也有 $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ 属于 R , 故 R 是有理数域的子环,

7, 证明实数域 R 上 n 阶上三角形矩阵构成的集合 $Ut(n, R)$

关于矩阵的加法运算和乘法运算构成有单位元的环, 并求其单位群,

证明: 设 A, B 都属于 $Ut(n, R)$, 则 $A-B, AB$ 都属于 $Ut(n, R)$,

所以 $Ut(n, R)$ 是环,

$Ut(n, R)$ 的单位元是单位矩阵,

$Ut(n, R)$ 的单位群为对角元不是零的上三角形矩阵构成的集合,

8, 分别求环 $\langle 6 \rangle = \{6r | r \in \mathbb{Z}\}$ 和 $\mathbb{Z}_6$ 的所有子环,

解: $\langle 6 \rangle$ 的子环一定是 $\langle 6 \rangle$ 的加法群的子群, 设为 $\langle 6n \rangle = \{6nt | t \in \mathbb{Z}\}$,

而 $\langle 6n \rangle$ 是 $\mathbb{Z}$ 的子环, $\langle 6n \rangle$ 包含于 $\langle 6 \rangle$,

所以 $\langle 6 \rangle$ 的所有子环为 $\langle 6n \rangle = \{6nt | t \in \mathbb{Z}\}$, 其中 $n \in \mathbb{N}$,

6 的正因数有 1, 2, 3, 6, 所以 $\mathbb{Z}_6$ 的所有子环为 $\mathbb{Z}_6, \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}, \{\bar{0}, \bar{3}\}, \{\bar{0}\}$

9, 证明 $R = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x & y \end{pmatrix} \middle| x, y \in R \right\}$

关于矩阵的加法和乘法运算构成没有单位元的非交换环, 并求 R 的中心,

证明: 因为对属于 R 的任意 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x_1 & y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$

都有 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x_1 & y_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} \in R, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x_1 & y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y_1 x_1 & y_1 y_2 \end{pmatrix} \in R,$

所以 R 是 $M_2(R)$ 的子环,

若 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix}$ 是单位元, 则 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x & y \end{pmatrix},$

则 $ya=x$, 其中任意 x, y 属于 R , 故 a 无解, 从而 R 无单位元,

又因 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, 因此 R 是非交换环,

若 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x & y \end{pmatrix}$ 属于 $C(R)$, 则对任意属于 R 的任意 x, y 有

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ bx & by \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ ya & yb \end{pmatrix}$, 即 $bx=ay$,

当 $x=0, y \neq 0$ 时, $a=0$, 当 $y=0, x \neq 0$ 时, $b=0$, 所以 $C(R) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

10, 举例说明满足下列条件的环存在,

(1) 环 R 有单位元, 但 R 的某个子环 S 没有单位元;

(2) 环 R 没有单位元, 但 R 的某个子环 S 有单位元;

(3) 环 R 和它的一个子环 S 都有单位元, 但这两个单位元不相等

解(1) $R = \mathbb{Z}, S = 2\mathbb{Z}$,

$$(2) R = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x & y \end{pmatrix} \mid x, y \in R \right\}, S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \mid y \in R \right\},$$

$$(3) R = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Q} \right\}, S = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a \in R \right\},$$

或 $R = \mathbb{Z}, S = \{0\}$, 或 $\mathbb{Z}_6$ 的子环 $\{\bar{0}, \bar{3}\}$,

习题 1 证明实数域上 n 阶下三角形矩阵(对角矩阵)构成的集合

关于矩阵的加法和乘法构成有单位元的环, 并求它的单位群,

证明: 根据矩阵的性质可知,

实数域上 n 阶下三角形矩阵(对角矩阵)集合的减法运算、乘法运算封闭,

根据子环的判别定理知其关于矩阵的加法和乘法运算构成环,

因为单位矩阵是下三角形矩阵(对角矩阵), 因此这也有单位元的环,

实数域上 n 阶下三角形矩阵(对角矩阵)中的所有可逆矩阵构成单位群,

习题 2 设 $M_n(\mathbb{Z}) = \{(a_{ij})_{n \times n} \mid a_{ij} \in \mathbb{Z}\}$ 是整数环 $\mathbb{Z}$ 上的所有 n 阶方阵的集合,

试证明 $M_n(\mathbb{Z})$ 关于矩阵的加法和乘法运算成为环,

证明: 因为整数的加法、减法和乘法运算都是封闭的,

因此, $M_n(\mathbb{Z})$ 关于矩阵的减法和乘法运算封闭,

根据子环的判别定理知 $M_n(\mathbb{Z})$ 是 $M_n(\mathbb{R})$ 的子环,

习题 3 设 $\{A; +, \cdot\}$ 是一个环, S_A 是 A 上的所有变换组成的集合, 在 S_A 中定义加法和乘法运算:

对属于 S_A 的任意 f, g , 和对属于 A 的任意 a , 有

$$(f+g)(a)=f(a)+g(a), (fg)(a)=f(a)g(a),$$

试证明 $\{S_A; +, \cdot\}$ 是环,

证明: 零变换是 $\{S_A; +\}$ 的零元, 属于 S_A 的 f 的负元是 $-f$, $(-f)(a)=-f(a)$,

因此, $\{S_A; +\}$ 是交换群,

因为乘法满足结合律, 所以 $\{S_A; \cdot\}$ 是半群,

对属于 S_A 的任意 f, g, h 和对属于 A 的任意 a , 有

$$(h(f+g))(a)=h(a)(f(a)+g(a)), (hf+hg)(a)=h(a)f(a)+h(a)g(a),$$

即左分配律成立,

同理可证右分配律成立,

因此 $\{S_A; +, \cdot\}$ 是环,

习题 4 在集合 $Z \times Z$ 上定义

$$(a, b) + (c, d) = (a+c, b+d), (a, b) \cdot (c, d) = (ac-bd, ad+bc),$$

试证明 $\{Z \times Z; +, \cdot\}$ 是有 1 的交换环,

证明 1: 按照环的定义证明, $\{Z \times Z; +\}$ 是交换群,

$$\text{由 } ((a, b) \cdot (c, d)) \cdot (s, t)$$

$$= (ac-bd, ad+bc) \cdot (s, t)$$

$$= (acs-bds-adt-bct, act-bdt+ads+bc s),$$

$$(a, b) \cdot ((c, d) \cdot (s, t))$$

$$= (a, b) \cdot (cs-dt, ct+ds)$$

$$= (acs-adt-bct-bds, act+ads+bc s-bdt),$$

知 $\{Z \times Z; +, \cdot\}$ 是环,

$$\text{又由 } (a, b) \cdot (c, d) = (ac-bd, ad+bc) = (c, d) \cdot (a, b),$$

$$(1, 0) \cdot (c, d) = (c, d),$$

知 $\{Z \times Z; +, \cdot\}$ 是有 1 的交换环,

证明 2: 由 $Z \times Z$ 的运算可以看出, 我们可以将 (a, b) 与复数 $a+bi$ 等同起来,

习题 5 设 R 是有 1 的交换环 ,

对属于 R 的 a, b , 定义 $a \oplus b = a + b - 1, a * b = a + b - ab$,

证明 $\{R; \oplus, *\}$ 是有 1 的交换环 ,

证明: 按环的定义验证 ,

在 $\{R; \oplus\}$ 中 , $(a \oplus b) \oplus c = a + b + c - 2 = a \oplus (b \oplus c), a \oplus b = a + b - 1 = b \oplus a$,

即结合律成立 , 交换律成立 ,

又因 $a \oplus 1 = a + 1 - 1 = a, a \oplus (2 - a) = 1$, 故 $\{R; \oplus\}$ 的零元是 1, a 的负元是 $2 - a$,

因此 , $\{R; \oplus\}$ 是交换群 ,

在 $\{R; *\}$ 中 ,

$$(a * b) * c = (a + b - ab) * c = a + b - ab + c - ac - bc + abc,$$

$$a * (b * c) = a * (b + c - bc) = a + b + c - bc - ab - ac + abc,$$

即结合律、交换律成立 ,

又因 $a * 0 = a$, 即单位元是 0, 因此 , $\{R; *\}$ 是有单位元的交换半群 ,

根据 $(a \oplus b) * c = a + b - 1 + c - ac - ab + c = (a * c) \oplus (b * c)$, 得右分配律成立 ,

同理左分配律也成立 ,

所以 , $\{R; \oplus, *\}$ 是有 1 的交换环 ,

习题 6 设 G 是交换群，其运算记为加法，
 $\text{End}(G)$ 表示 G 的所有自同态构成的集合，
 $\text{End}(G)$ 按照变换的乘法运算是以 1 的半群，
定义加法 $(\sigma + \tau)(a) = \sigma(a) + \tau(a)$ ，其中任意 σ, τ 属于 $\text{End}(G)$ ， a 属于 G ，
试证明 $\text{End}(G)$ 是有 1 的环，
证明： 由 $(\sigma + \tau)(a + b) = \sigma(a + b) + \tau(a + b) = (\sigma + \tau)(a) + (\sigma + \tau)(b)$
知 $(\sigma + \tau)$ 属于 $\text{End}(G)$ ，
由 $(\rho + (\sigma + \tau))(a) = \rho(a) + \tau(a) + \sigma(a) = ((\rho + \sigma) + \tau)(a)$ ，
 $(\sigma + \tau)(a) = \tau(a) + \sigma(a) = (\tau + \sigma)(a)$ ，
知 $\{\text{End}(G); +\}$ 中结合律、交换律成立，
另外， G 的零映射 0 是 $\{\text{End}(G); +\}$ 的零元，
 τ 属于 $\text{End}(G)$ ，定义 $-\tau$ 为 $(-\tau)(a) = -\tau(a)$ ，
则由 $(-\tau)(a + b) = -\tau(a + b) = -\tau(a) - \tau(b) = (-\tau)(a) + (-\tau)(b)$ ，
知属于 $\text{End}(G)$ 的 $-\tau$ 是 τ 的负元，
因此， $\{\text{End}(G); +\}$ 是交换群，
再从 $(\rho(\sigma + \tau))(a) = \rho(\sigma(a) + \tau(a)) = (\rho\sigma + \rho\tau)(a)$ ，
 $((\sigma + \tau)\rho)(a) = (\sigma + \tau)\rho(a) = (\sigma\rho + \tau\rho)(a)$ ，
知 $\text{End}(G)$ 的乘法对加法满足分配律，
所以 $\{\text{End}(G); +, \bullet\}$ 是有 1 的环，

习题 7 设环 R 无单位元，定义 $R \times Z$ 上的加法和乘法运算如下：

$$(r_1, m) + (r_2, n) = (r_1 + r_2, m + n), (r_1, m)(r_2, n) = (r_1 r_2 + m r_2 + n r_1, mn),$$

其中 r_1, r_2 属于 R , m, n 属于 Z ,

试证明 $R \times Z$ 对于这样的加法和乘法运算构成有单位元的环，

证明： 因为 $\{R; +\}$ 和 $\{Z; +\}$ 是交换群，它们的直积 $R \times Z$ 关于加法运算是交换群，又因为

$$((r_1, m)(r_2, n))(r_3, k) = (r_1 r_2 r_3 + m r_2 r_3 + n r_1 r_3 + k r_2 r_2 + k m r_2 + k n r_1 + m n r_3, mnk),$$

$$(r_1, m)((r_2, n)(r_3, k)) = (r_1 r_2 r_3 + k r_1 r_2 + n r_1 r_3 + m r_2 r_3 + k m r_2 + k n r_1 + m n r_3, mnk),$$

$$((r_1, m) + (r_2, n))(r_3, k)$$

$$= (r_1 + r_2, m + n)(r_3, k)$$

$$= (r_1 r_3 + r_2 r_3 + r_1 k + r_2 k + m r_3 + n k, mk + nk)$$

$$= (r_1, m)(r_3, k) + (r_2, n)(r_3, k),$$

即乘法结合律和乘法对加法的右分配律成立，同理可证左分配律成立，

因此 $R \times Z$ 是环，

又因 $(r_1, m)(0, 1) = (r_1, m) = (0, 1)(r_1, m)$ ，即 $R \times Z$ 有单位元 $(0, 1)$ ，

习题 8 设 R 为 $(-\infty, +\infty)$ 上实函数的集合，

在 R 中定义加法和乘法运算为 $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $(fg)(x) = f(g(x))$,

其中任意 f, g 属于 R , x 属于 $(-\infty, +\infty)$,

问 R 对这种加法和乘法运算是否构成环？

解： 不能构成环，

因为若

$$f(x) = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} -x, & x \geq 0 \\ -\frac{1}{2}x, & x < 0 \end{cases} \quad h(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x, & x > 0 \\ x, & x \leq 0 \end{cases}$$

则 $f(g+h) \neq fg+fh$ ，即分配律不成立，

故 R 不是环，

习题 9 设大于等于 2 的 n 为正整数，求环 Z_n 的单位群

解: 当且仅当 a 与 n 互素时，属于 Z_n 的 $\bar{a}$ 是可逆元，

因此 Z_n 的单位群为 $\{a \in Z_n | (a, n) = 1\}$

习题 10 求数域 F 上的 n 阶矩阵环 $M_n(F)$ 的中心，

证明: 因为与所有矩阵可交换的矩阵为纯量矩阵，所以 $M_n(F)$ 的中心为 FE ，

习题 11 问子环的并还是否是子环?请说明理由，

解: 两个子环的并不一定是子环，

如 Z_{18} 的两个子环的并 $\{\bar{0}, \bar{6}, \bar{12}\} \cup \{\bar{0}, \bar{9}\} = \{\bar{0}, \bar{6}, \bar{9}, \bar{12}\}$ 不是 Z_{18} 的子环

习题 12 设环 R 有唯一元素 e 使等式 $ae=a$ 成立，其中 a 属于 R ，

试证明 e 是 R 的单位元，

证明: 对属于 R 的任意 b ，有 $b(ea-a+e)=b$ ，由已知条件知 $ea-a+e=c$ ，

从而 $ea=a$ ，所以 e 是 R 的单位元，

习题 13 设 R 是有 1 的环，存在正整数 n 使得 $a^n=0$ ，其中 a 属于 R ，

试证明 $1-a$ 可逆，

证明: 因为 $1=1-a^n=(1-a)(1+a+\cdots+a^{n-1})=(1+a+\cdots+a^{n-1})(1-a)$ ，

所以 $1-a$ 可逆，其逆元为 $1+a+\cdots+a^{n-1}$ ，

习题 14 设 R 是有 1 的环, a, b 属于 R , 试证明若 $1-ab$ 可逆, 则 $1-ba$ 可逆,

证明: 因为 $[1+b(1-ab)^{-1}a](1-ba)$

$$=1-ba+b(1-ab)^{-1}a-b(1-ab)^{-1}aba$$

$$=1-ba+b(1-ab)^{-1}(1-ab)a$$

$$=1,$$

$$(1-ba)[1+b(1-ab)^{-1}a]$$

$$=1-ba+b(1-ab)^{-1}a-bab(1-ab)^{-1}a$$

$$=1-ba+b(1-ab)(1-ab)^{-1}a$$

$$=1,$$

所以 $1-ba$ 可逆,

习题 15 设 R 是有 1 的环, a, b 属于 R , $ab=1$ 但 $ba \neq 1$,

试证明 $ax=1$ 有无穷多个解

证明: 对正整数 n , 令 $x_n=b+(ba-1)a^n$,

则 $ax_n=a[b+(ba-1)a^n]=1+(aba-a)a^n=1$, 即 x_n 是 $ax=1$ 的解,

下而证明当 $n \neq m$ 时, $x_n \neq x_m$, 从而结论得证,

反证, 设不等式 $1 \leq n < m$ 成立时, $x_n = x_m$, 则 $(ba-1)a^n = (ba-1)a^m$,

两端右乘 b^{n+1} , 得到 $(ba-1)b = (ba-1)a^{m-n-1}$, 故 $(ba-1)a^{m-n-1} = 0$,

两端再右乘 b^{m-n-1} , 得到 $ba=1$, 这与已知矛盾

习题 16 若 R 为交换环, a, b 均为幂零元, 则 $a+b$ 也是幂零元,

若 R 不为交换环, 上述结论是否仍成立?

证明: 若 a, b 均为幂零元, 则存在正整数 n, m , 使得 $a^n=0, b^m=0$,

由于 R 为交换环, $(a+b)^{m+n}=0$, 因此 $a+b$ 为幂零元,

若 R 不为交换环, 上述结论不成立,

例如: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 是 $M_n(R)$ 中两个幂零元, 但是 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 不是幂零元,

习题 17 设 R 为环，若 R 的每个元素 a 均等式 $a^2=a$ 成立，则称 R 为布尔环，试证明布尔环 R 为交换环，并且 $2a=0$ ，其中 a 属于 R ，

证明： 设 x, y 属于 R ，由 $x^2=x, y^2=y, (x+y)^2=x+y$ 得

$$xy=-yx=(-yx)^2=(yx)^2=yx,$$

即布尔环为交换环，

因为 $4a=4a^2=(2a)^2=2a$ ，所以 $2a=0$ ，其中 a 属于 R ，

习题 18 求克莱因四元群 K_4 的自同态环的所有元素，

解： 设 K_4 的除单位元以外的元素为 a, b, c ，

设 σ 是 K_4 的自同态，则 $\sigma(1)=(1)$ ，且 $\text{Ker } \sigma$ 是 K_4 的子群，

若 $\text{Ker } \sigma$ 的阶为 1，

则 $\sigma = \begin{pmatrix} (1) & a & b & c \\ (1) & \sigma(a) & \sigma(b) & \sigma(c) \end{pmatrix}$ 是双变换，共有 $P_3^3=6$ 种；

若 $\text{Ker } \sigma$ 的阶为 4，则 σ 是零变换；

若 $\text{Ker } \sigma$ 的阶为 2，则 $\text{Im } \sigma$ 是 2 阶群，

此时， a, b, c 中一个元素的像为单位元，

另两个元素的像相等，可取 a, b, c 中任意一个，此时 σ 有 9 种取法；

因此， K_4 的自同态环的元素共有 16 个，