1，证明 I=$\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \middle| a, b \in R\right\}$是矩阵环 $M_2(R)$的左理想 ，但不是 $M_2(R)$的右理想

证明:

因为$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-c & 0 \\ b-d & 0 \end{pmatrix} \in I$，$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s & 0 \\ t & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} as+ct & 0 \\ bs+dt & 0 \end{pmatrix} \in I$，

所以 I 是 $M_2(R)$的左理想 ，

因为$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin I$

所以 I 不是 $M_2(R)$的右理想 ，

2，设 R 是交换环 ，S 是环 R 的非空子集 ，令 Ann(S)={a∈R|as=0，∀s∈S}，

试证明 Ann(S)是 R 的理想 ，

证明: 对属于 Ann(S)的任意 a，b，都有 as=bs=0，

从而(a−b)s=0，即 a−b 属于 Ann(S)，

对属于 Ann(S)任意 a，和属于 R 的任意 r，都有(ar)s=r(as)=0，(ra)s=r(as)=0，

从而 ar，ra 属于 Ann(S)，

故 Ann(S)是 R 的理想 ，

3，设 R 是有 1 的交换环 ，I 是 R 的理想 ，

试证明 J={a ∈ R | ∃ n ∈ N，a^n∈I}是 R 的理想 ，

证明: 对属于 J 的任意 a，b，存在有属于 N 的 m，n，使得 a^m 属于 I，b^n 属于 I，

则$(a-b)^{m+n} = \sum_{i=0}^{m+n} \binom{m+n}{i} a^i \bullet (-b)^{m+n-i}$

由于 I 是 R 的理想 ，从而$(a-b)^{m+n}$属于 I，即 a−b 属于 J，

对属于 R 的任意 r，和属于 J 的任意 a，有$(ra)^n=r^n a^n$属于 I，

故 J 是 R 的理想 ，

4，问环的中心是否一定是理想?四元数体的中心是否是理想?

证明: 因为与所有矩阵可交换的矩阵为纯量矩阵，

所以数域 F 上的 n 阶矩库环 $M_n(F)$的中心为 FE，

而 FE 不是 $M_n(F)$的理想，

四元数体的中心为$\left\{\lambda\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\middle|\ \lambda\in R\right\}$，它不是理想

5，求剩余类环 Z_{24} 的所有理想，

解: Z_{24} 的所有理想形式为$\langle\bar{s}\rangle$，$s|24$，$1\leqslant s\leqslant 24$，

故 Z_{24} 的全部理想为$\langle\bar{1}\rangle$，$\langle\bar{2}\rangle$，$\langle\bar{3}\rangle$，$\langle\bar{4}\rangle$，$\langle\bar{6}\rangle$，$\langle\bar{8}\rangle$，$\langle\overline{12}\rangle$，$\langle\overline{24}\rangle$，

6，证明实数域 R 上矩阵环 $M_2(R)$是单纯环，

证明: 设 I 为 $M_2(R)$的任一理想，任取 I 的一个非零元素 $A=(a_{ij})$，

则存在不等于 0 的 a_{ij}，使得 $E_{ij}=\frac{1}{a_{ij}}E_{ii}AE_{jj}$属于 I，进而 $E_{kk}=E_{ki}E_{ij}E_{jk}$属于 $I(k=1,2)$，

故 $E=E_{11}+E_{22}$ 属于 I，由此得 $I=M_2(R)$，环 $M_2(R)$没有非平凡理想，

所以实数域 R 上矩阵环 $M_2(R)$是单纯环

7，证明$\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \middle| \ a,b,c \in R\right\}$是环，并求 R 的所有理想

证明: 因为 $M_n(R)$是环，

又因对属于 R 的任意 A=$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$，和对属于 R 的任意 B=$\begin{pmatrix} d & e \\ 0 & f \end{pmatrix}$

有 A–B=$\begin{pmatrix} a-d & b-e \\ 0 & c-f \end{pmatrix}$属于 R，AB=$\begin{pmatrix} ad & ae+bf \\ 0 & cf \end{pmatrix}$属于 R

从而 R 是 $M_n(R)$的子环，故 R 是环，

令 i=$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，j=$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，k=$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，得 ii=i，ij=j，jk=j，kk=h，其余运算为零

设 I 是 R 的非零理想，令 0≠$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$=ai+bj+ck 属于 I，

则(ai+bj+ck)i=ai 属于 I，(ai+bj+ck)j=aj 属于 I，(ai+bj+ch)k=bj+ck 属于 I

i(ai+bj+ck)=ai+bj 属于 I，j(ai+bj+ck)=cj 属于 I，k(ai+bj+ch)=ck 属于 I，

(1)若 a≠0，则 i，j 属于 I，

此时，若 k 属于 I，则 I=R，若 k 不属于 I，则 I=$\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \ a,b \in R\right\}$

(2)若 a=0，c=0，则 I=$\left\{\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \ b \in R\right\}$

(3)若 a=0，c≠0，则 j，k 属于 I，此时，I=$\left\{\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \middle| \ b,c \in R\right\}$

R 的所有理想为:

I_1={0}，

I_2=$\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \ a,b \in R\right\}$

I_3=$\left\{\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \ b \in R\right\}$，

I_4=$\left\{\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \middle| \ b,c \in R\right\}$

I_5=R，

8，在整数环 Z 中，证明⟨m⟩∩⟨n⟩=⟨[m，n]⟩，其中[m，n]是 m 和 n 的最小公倍数，

证明: 若 t 属于⟨m⟩∩⟨n⟩，则 m|t，n|t，

从而，[m，n]|t，t 属于⟨[m，n]⟩，⟨m⟩∩⟨n⟩包含于⟨[m，n]⟩，

反之，由 m|[m，n]得⟨[m，n]⟩包含于⟨m⟩，同理⟨[m，n]⟩包含于⟨n⟩，

得⟨[m，n]⟩包含于⟨m⟩∩⟨n⟩，

所以⟨m⟩∩⟨n⟩=⟨[m，n]⟩

9，在整数环 Z 中，将以下理想表示为主理想的形式:

(1)$\langle\{6,10\}\rangle$;　(2)$\langle 6\rangle+\langle 10\rangle$;　(3)$\langle 6\rangle\cap\langle 10\rangle$;　(4)$\langle 6\rangle\langle 10\rangle$，

解: (1)$\langle\{6,10\}\rangle=\langle(6,10)\rangle=\langle 2\rangle$　，　(2)$\langle 6\rangle+\langle 10\rangle=\langle(6,10)\rangle=\langle 2\rangle$，

(3)$\langle 6\rangle\cap\langle 10\rangle=\langle[6,10]\rangle=\langle 30\rangle$　，　(4)$\langle 6\rangle\langle 10\rangle=\langle 60\rangle$，

10，试分别求 Z 和 Z_{24} 的所有商环，

解: Z 理想为$\langle n\rangle$，$n\geqslant 0$，所以 Z 的所有商环为 Z，$\{0\}$，$Z_n(n\geqslant 2)$，

Z_{24} 的所有理想为$\langle\overline{0}\rangle$，$\langle\overline{1}\rangle$，$\langle\overline{2}\rangle$，$\langle\overline{3}\rangle$，$\langle\overline{4}\rangle$，$\langle\overline{6}\rangle$，$\langle\overline{8}\rangle$，$\langle\overline{12}\rangle$，

因此 Z 的所有商环为

$Z_{24}/\langle 0\rangle$，$Z_{24}/\langle\overline{1}\rangle$，$Z_{24}/\langle\overline{2}\rangle$，$Z_{24}/\langle\overline{3}\rangle$，$Z_{24}/\langle\overline{4}\rangle$，$Z_{24}/\langle\overline{6}\rangle$，$Z_{24}/\langle\overline{8}\rangle$，$Z_{24}/\langle\overline{12}\rangle$，

11，设 I 是环 R 的理想，证明 R 的包含 I 的理想与 R/I 的理想一一对应，

特别地，R/I 的任意一个理想形如 J/I，其中 J 是 R 的包含 I 的理想，

证明: 若 J 是环 R 的理想，且 I 包含于 J，则 J/I 是 R/I 的理想，

令 A 是 R 的包含 I 的理想的集合，B 是 R/I 的理想的集合，

定义映射: φ: A→B，J→J/I，若$\bar{J}$是 R/I 的理想，则 I 属于$\bar{J}$，

令 $J=\{j\in R\mid j+I\in\bar{J}\}$，显然，I 包含于 J 且 J 是 R 的理想，

又因有$\varphi(J)=\bar{J}$，这说明φ是满射，

若 $J_1/I=J_2/I$，则对属于 J_1 的任意 j_1，存在属于 J_2 的 j_2，使得 $j_1+I=j_2+I$，

从而存在属于 I 的 i，使得 $j_1=j_2+i$ 属于 J_2，因此，J_1 包含于 J_2，

同样的，我们有 J_2 包含于 J_1，所以 $J_1=J_2$，这说明φ是单射，因而φ是双射，

由此也得到，R/I 的任意一个子群形如 J/I，其中 J 是 R 的包含 I 的理想

12，求同余式方程组$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod 2 \\ x \equiv 2 \pmod 3 \\ x \equiv 3 \pmod 5 \end{cases}$ 的一个解，

解: 由带余除法得

$1=2\times(-7)+(3\times5)\times1$，

$1=3\times(-3)+(2\times5)\times1$，

$1=5\times(-1)+(2\times3)\times1$，

所以取

$y_1=3\times5\times1=15$，

$y_2=2\times5\times1=10$，

$y_3=2\times3\times1=6$，

从而 $x=1\times21+1\times15+2\times10+3\times6=53$，

习题 1 举例说明一个无零因子环 R 的商环可能有零因子，

解: 整数环 Z 是无零因子环，商环 $Z/\langle 4\rangle=Z_4$ 有零因子，

习题 2 举例说明一个环 R 的两个子环 H，K 的和 H+K 不一定是 R 的子环，

解: 令 $R=M_2(C)$，则 $H=\left\{\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| a \in C\right\}$，$K=\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \middle| b \in C\right\}$都是 R 的子环，

而 $H+K=\left\{\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \middle| a,b \in C\right\}$，当 $ab\neq0$ 时，$\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix} ab & 0 \\ 0 & ab \end{pmatrix}$不属于 H+K

故 H+K 不是 R 的子环，

习题 3 在环$\{Z;+,\bullet\}$中，设 $S=\{0,1,2\}$，$T=\{3,4\}$，求 S+T，ST，

解: $S+T=\{3,4,5,6\}$，

因为 $ST=\{3i+4j+6k+8l \mid i,j,k,l\in N\}$，所以 $6+3i$，$7+3i$，$8+3i$ 属于 ST，i 属于 N

因此，$ST=N-\{1,2,5\}$，

习题 4 设 m，n 是整数环 Z 中的正整数，证明

(1)$\langle m\rangle$包含于$\langle n\rangle \Leftrightarrow n|m$;

(2)$\langle m\rangle+\langle n\rangle=Z\Leftrightarrow(m,n)=1$，其中$(m,n)$表示 m，n 的最大公因数，

证明: (1)由$\langle m\rangle=\{mt \mid t\in Z\}$即可得证

(2)因为$\langle m\rangle+\langle n\rangle=\langle(m,n)\rangle$，而$\langle(m,n)\rangle=Z\Leftrightarrow(m,n)=1$，所以结论得证，

习题 5 设 Z_{12} 中的子环 $H=\{\bar{0},\bar{3},\bar{6},\bar{9}\}$，$K=\{\bar{0},\bar{4},\bar{8}\}$，

求 $H+K$，$H\cap K$，$H\cup K$，HK

解: $H+K=Z_{12}$

$H\cap K=\{\bar{0}\}$，

$H\cup K=\{\bar{0},\bar{3},\bar{6},\bar{9},\bar{4},\bar{8}\}$，

$HK=\{\bar{0}\}$，

习题 6 设 R 为环，$C(R)=\{c\in R|rc=cr，\forall r\in R\}$是 R 的中心，

(1)证明 C(R)是 R 的子环，但未必是 R 的理想;

(2)如果 F 为域，求证矩阵环 $M_n(F)$的中心为$\{aE_n|a\in F\}$，

其中 E 表示 n 阶单位方阵

证明: (1)显然 C(R)是非空集合，

由 a，b 属于 C(R)，r 属于 R，得 $a-b$ 属于 C(R)，ab 属于 C(R)，

根据子环判别定理知 C(R)是 R 的子环，

(2)由高等代数的知识可知 $M_n(F)$的中心为纯量矩阵$\{aE_n|a\in F\}$，

故 $M_n(F)$的中心不是理想，

习题 7 证明数域 F 上的矩阵环 $M_n(F)$是单纯环，

证明: 设 I 是 $M_n(F)$中任一个非零理想，只需证明单位矩阵在 I 中，

设 E_{ij}为(i，j)位置元素为 1，其余元素全为 0 的 n 阶矩阵，

因为 $I\neq 0$，则有不等于 0 的矩阵 $A\in I$，

设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，则有元素 $a_{kl}\neq 0$，

由理想的性质得$(a_{kl}^{-1}E_{ik})AE_{li}$属于 I，但是$(a_{kl}^{-1}E_{ik})AE_{li}=E_{ii}$，i=1，2，⋯，n，

所以有 $E=\sum_{i=1}^{n}E_{ii}$ 属于 I 即 $I=M_n(F)$

因而 $M_n(F)$中没有非平凡理想，$M_n(F)$是单纯环，

习题 8 设 R 是非零、有 1 的交换环，证明当且仅当 R 是域时，R 是单纯环，

证明: 充分性显然，

必要性，假如 R 不是域，则存在非零的属于 R 的不可逆元 a，

于是$\langle a\rangle$就是 R 的非平凡理想，这与 R 是单纯环矛盾，

习题 9 若 H，K 是环{R;+，•}的理想，

问 $HK=\left\{\sum_{i=1}^{n}h_ik_i \middle| h_i\in H,k_i\in K,n\in Z^{+}\right\}$是否是{R;+，•}的理想?

证明: 设 a，b 属于 HK，

则存在属于 H 的h_i，和属于 K 的k_i，使得 $a=\sum_{i=1}^{m}h_ik_i$，$b=\sum_{i=1+m}^{m+n}h_ik_i$

对属于 R 的任意 r，

有 $a-b=\sum_{i=1}^{m}h_ik_i-\sum_{i=1+m}^{m+n}h_ik_i$ 属于 HK

有 $ra=r\sum_{i=1}^{m}h_ik_i=\sum_{i=1}^{m}(rh_i)k_i$ 属于 HK

有 $ar=\left(\sum_{i=1}^{m}h_ik_i\right)r=\sum_{i=1}^{m}h_i(k_ir)$ 属于 HK

故 HK 是 R 的理想，

习题 10 设 R 是交换环，证明 $Rad(R)=\{a\in R|\exists n\in Z^+, a^n=0\}$是 R 的理想，

证明: 因 Rad(R)非空，

设 a，b 属于 Rad(R)，则存在属于 Z^+的 m，n 使得 $a^m=b^n=0$，

于是对属于 R 的任意 r 有

$$(a-b)^{m+n}=a^{m+n}+\sum_{k=1}^{m+n}(-1)^k C_{m+n}^k a^{m+n-k}b^k+(-1)^{m+n}b^{m+n}=0$$

$(ra)^m=r^m a^m=0$

所以 a−b，ra 属于 Rad(R)，Rad(R)是 R 的理想，

习题 11 设 S 是环 R 的非空子集，I 是环 R 的理想，且 I 包含于 S，证明

(1)若 S 是环 R 的子环，则 S/I 是 R/I 的子环;

(2)若 S 是环 R 的理想，则 S/I 是 R/I 的理想，

证明:

(1)设 x，y 属于 S，则 x+I，y+I 属于 S/I，于是 x−y，xy 属于 S，

(x+I)−(y+I)=(x−y)+I 属于 S/I，

(x+I)(y+I)=xy+I 属于 S/I，

所以 S/I 是 R/I 的子环，

(2)设 x，y 属于 S，r 属于 R，于是 x−y，xr，rx 属于 S，

(x+I)−(y+I)=(x−y)+I 属于 S/I，

(r+I)•(x+I)=rx+I 属于 S/I，

(x+I)•(r+I)=xr+I 属于 S/I，

所以 S/I 是 R/I 的理想，

习题 12 求商环 $Z[i]/\langle 2+i\rangle$，

解: 因为 a+bi=(a−2b)+b(2+i)，所以$\overline{a+bi}=\overline{a-2b}$，

再由 5=(2+i)(2−i)知 $\overline{a+bi}=\bar{r}$，r=0，1，2，3，4，

设 i，j 属于{0，1，2，3，4}，若$\bar{i}=\bar{j}$，则 2+i | i−j，

从而 $5|(i-j)^2$，那么 i=j，即 $Z[i]/\langle 2+i\rangle=\{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4}\}$，

习题 13 证明 $I=\left\{\begin{pmatrix}0 & 2x\\0 & 0\end{pmatrix}\middle| x\in Z\right\}$是 $R=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\0 & c\end{pmatrix}\middle| a,b,c\in Z\right\}$的理想，

并求商环 R/I，

证明: 对属于 Z 的 a，b，c，x，y 有，

$\begin{pmatrix}0 & 2x\\0 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 2y\\0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 2(x-y)\\0 & 0\end{pmatrix}$属于 I

$\begin{pmatrix}a & b\\0 & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 2x\\0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 2ax\\0 & 0\end{pmatrix}$属于 I

$\begin{pmatrix}0 & 2x\\0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\0 & c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 2cx\\0 & 0\end{pmatrix}$属于 I

根据理想的判别定理知 I 是 R 的理想，

且 R/I=$\left\{\begin{pmatrix}a & 0\\0 & c\end{pmatrix}+I,\begin{pmatrix}a & 0\\0 & c\end{pmatrix}+I\,\middle|\, a,c\in Z\right\}$

习题 14 设 $I_1,\cdots,I_n,\cdots$均是环 R 的理想，且 $I_1\subseteq{}_2I\subseteq\cdots\subseteq I_n\subseteq\cdots$，

试证明集合 $I=\bigcup_{i=1}^{\infty}I_i$ 是环 R 的理想

证明: 若 a，b 属于 I，则存在 j 使得 a，b 属于 I_j，

对属于 R 的任意 r 有 a–b，ra，rb 属于 I_j 包含于 I，

因此 I 是环 R 的理想，

习题 15 设 R 是有单位元的非零环，

试证明当且仅当 R 内无非零的真左理想时，R 是除环

证明: 充分性，设 a 是 R 的非零元，Ra 是非零左理想，

所以 Ra=R，那么存在属于 R 的 b 使得 ba=1，

同理，因为 b 是 R 的非零元，所以存在属于 R 的 c 使得 cb=1，

从而 ab=(cb)(ab)=cb=1，即 a 可逆，因此，R 是除环，

必要性，假设 I 是 R 的非零左理想，令 a 属于 I，a 不等于 0，

因为 R 是除环，所以 a 是可逆元，从而 R=I，即 R 内没有非零的真左理想，

习题 16 设 I 是环 R 的一个左理想，

试证明 I 的左零化子 N={x 属于 R|xI=0}是 R 的理想，

证明: 对属于 N 的任意 x，y，属于 R 的任意 r，和属于 I 的任意 a，

有(x−y)a=xa−ya=0，rxa=0，xra=0，

即 x−y 属于 N，rx，xr 属于 N，从而 N 是 R 的一个理想，

习题 17 设 R 是有 1 的环，I，J，K 是 R 的理想，

试证明(I+J)K=IK+JK，K(I+J)=KI+KJ，

证明: 由 I 包含于 I+J 知 IK 包含于(I+J)K，同理 JK 包含于(1+J)K，

故 IK+JK 包含于(I+J)K，

令$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)k_i$属于$(I+J)K$，其中$a_i$属于 I，$b_i$属于 J，$k_i$属于 K，$i=1,2,\cdots,n$

则$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)k_i=\sum_{i=1}^{n}a_ik_i+\sum_{i=1}^{n}b_ik_i$ 属于 $IK+JK$

即(I+J)K 包含于 IK+JK，从而(I+J)K=IK+JK，同理可证 K(I+J)=KI+KJ，

习题 18 设 R 是有 1 的环，I，J，K 是 R 的理想，且 I+K=R=J+K，证明 IJ+K=R，

证明: 由已知条件，存在属于 I 的 a，属于 J 的 b 以及属于 K 的 k_1，k_2，

使得 $a+k_1=1$，$b+k_2=1$，

两个式子相乘得 $ab+(ak_2+k_1b+k_1k_2)=1$，

其中 ab 属于 IJ，$ak_2+k_1b+k_1k_2$ 属于 K，即 1 属于 IJ+K，

从而 IJ+K=R，

习题 19 设 R 是有 1 的交换环，$I_1, I_2, \cdots, I_n$，为 R 的理想，

且 $I_s+I_t=R$，其中 $s, t=1, 2, \cdots, n, s\neq t$，试证明 $I_1I_2\cdots I_n=I_1\cap I_2\cap\cdots\cap I_n$

证明: 对 n 用数学归纳法，

当 $n=2$ 时，由已知条件知，存在属于 I_1 的 x，和属于 I_2 的 y，使得 $x+y=1$，

对属于 $I_1\cap I_2$ 的 a，

有 $a=a(x+y)=xa+ay$ 属于 I_1I_2，即 $I_1\cap I_2$ 包含于 I_1I_2，同样有 I_1I_2 包含于 $I_1\cap I_2$，

故 $n=2$ 时结论成立，

假设结论对 $n-1$ 成立，即有 $I_1I_2\cdots I_{n-1}=I_1\cap I_2\cap\cdots\cap I_{n-1}$，

我们利用 $n=2$ 时的证明方法可证得 $I_1I_2\cdots I_n=I_1\cap I_2\cap\cdots\cap I_n$

习题 20 求同余式方程组$\begin{cases} x\equiv 3 \pmod 5 \\ x\equiv 4 \pmod 7 \end{cases}$ 的一个解

解: 因为 $1=3\bullet5+(-2)\bullet7$，故解为 $x=3\bullet(-14)+4\bullet15=18$