

了解和认识代数结构的途径之一，就是先搞清楚其子结构，
即如果令 G 和 G' 是两个代数结构(例如是群结构)，并且 $G \cong G'$ ，
则当 G 中存在一个子结构 H 时，必定在 G' 中存在一个相对应的子结构 H' ，
反之亦然，
也可以说，对于两个代数结构 G 和 G' ，
如果在 G 中存在一个具有性质 P 的子结构 H ，
但是在 G' 中根本不存在具有性质 P 的子结构，那么 $G \not\cong G'$ ，
所以，研究子结构对于我们认识代数结构具有十分重要的意义，

定义 2.1 设 $\{G; \bullet\}$ 是群， H 是 G 的非空子集，
若“ $\bullet$ ”是 H 的运算，且 $\{H; \bullet\}$ 也是群，则称 H 是 G 的子群，

特别地，如果群 G 的子群 H 使不等式 $H \neq G$ 成立，则称 H 是 G 的真子群，
实际上，对于任意群 G 都有两个子群 G 和 $\{e\}$ ，称其为 G 的平凡子群，
 G 的其他子群(如果有的话)称为 G 的非平凡子群，
注意，若 H 是 G 的子群，则 H 的单位元和 G 的单位元相同，
事实上，若设 e' 是子群 H 的单位元，则 $e'e' = e'$ ，而在群 G 中我们有 $ee' = e'$ ，
因而， $e'e' = ee'$ ，根据群的消去律得 $e' = e$ ，
由群 G 和其子群 H 的单位元相同可知，
 H 中的元素在 H 中的逆元和 G 中的逆元相同，

下面我们给出子群的判别定理，

定理 2.1 设 H 是群 G 的非空子集，则以下条件等价：

(1) H 是 G 的子群，

(2) 对属于集合 H 的任意 a, b ，有 a^{-1} 属于 H 和 ab 属于 H

(3) 对属于集合 H 的任意 a, b ，有 ab^{-1} 属于 H

证: (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3)是显然的，现在证明(3) $\Rightarrow$ (1)，

因为 H 是 G 的非空子集，

所以对属于 H 的任意 a ，由(3)有 $e=aa^{-1}$ 属于 H ，即 H 有单位元，

又因对属于 H 的任意 a ，有 $a^{-1}=ea^{-1}$ 属于 H ，即 H 中的任意元素有逆元，

对属于 H 的任意 a, b ，有 $ab=a(b^{-1})^{-1}$ 属于 H ，即 G 的运算也是 H 的运算，

且该运算满足结合律，

所以 H 关于 G 的运算是群，进而， H 是 G 的子群，

定理 2.2 设 H 是群 G 的非空有限子集，若 G 的运算也是 H 的运算

(即对属于 H 的任意 h, k ，有 hk 属于 H)，则 H 是 G 的子群，

证: 因为 G 的运算也是 H 的运算，所以 H 关于 G 的运算是有限半群

另外，群 G 的消去律在其子集合 H 上同样成立，

因此，根据本章定理 1.1 可知， H 是 G 的子群，

例 2.1 证明 $SL_n(R)=\{A \in M_n(R) | \det(A)=1\}$ 关于矩阵的乘法运算是群

(称为实数域上的 n 阶特殊线性群)，

证: 显然， $SL_n(R)$ 是一般线性群 $GL_n(R)$ 的子集合，

又因对属于 $SL_n(R)$ 的任意 A, B ，有 $\det(AB^{-1})=\det(A)\det(B)^{-1}=1$ ，

即 AB^{-1} 属于 $SL_n(R)$ ，根据定理 2.1 知， $SL_n(R)$ 是群，

例 2.2 设 G 是一个群，任意 a 属于 G ，

试证明映射 $L_a: G \rightarrow G, g \rightarrow ag$ 是 G 上的双变换

$L(G) = \{L_a | a \in G\}$ 关于变换的乘法运算是一个群，

一般地，我们称 L_a 为 G 的左乘变换， $L(G)$ 为群 G 的左乘变换群，

证： 对属于群 G 的任意 g_1, g_2 ，有 $ag_1 = ag_2 \Leftrightarrow g_1 = g_2$ ，即 L_a 是 G 上的单变换

又由 $a(a^{-1}g_1) = g_1$ ，知 $a^{-1}g_1$ 是 g_1 的原像，即 L_a 是满变换，

因而 L_a 是 G 上的双变换

另外， $L(G)$ 是全变换群 S_G 的子群，

事实上，对属于 $L(G)$ 的任意 L_a, L_b ，有 $L_a L_b = L_{ab}$ 属于 $L(G)$ ，

进而 $(L_a)^{-1} = L_{a^{-1}}$ 属于 $L(G)$ ，因此， $L(G)$ 是 S_G 的子群，

例 2.3 设 H 是群 G 的非空子集，试证明 $C_G(H) = \{x \in G | xa = ax, \forall a \in H\}$ 是 G 的子群

证： 因为 e 属于 $C_G(H)$ ，所以 $C_G(H)$ 是 G 的非空子集，

又因对属于集合 $C_G(H)$ 的任意 x, y ，和属于集合 H 的任意 a ，我们有

$x^{-1}a = x^{-1}(ax)x^{-1} = x^{-1}(xa)x^{-1} = ax^{-1}$ ，即 x^{-1} 属于 $C_G(H)$ ，

再由 $(xy)a = x(ay) = a(xy)$ ，即 xy 属于 $C_G(H)$ ，

所以根据定理 2.1，知 $C_G(H)$ 是 G 的子群

我们称群 $C_G(H)$ 是 H 在 G 中的中心化子，

特别地，当 $H = G$ 时，记 $C_G(G) = C(G)$ ，并称 $C(G)$ 是 G 的中心，

明显地，群的中心是交换群，且群 G 是交换群的充分必要条件是 $G = C(G)$ ，

例 2.4 证明 n 次对称群 S_n 中的偶置换构成的集合 A_n 关于变换的乘法运算是群，

证: 因为 A_n 是 S_n 的有限子集，且偶置换的合成是偶置换，

因此，根据定理 2.2， A_n 关于变换的乘法运算是群，

一般地，全变换群的子群称为变换群， n 次对称群 S_n 的子群称为置换群，

特别地， S_n 的子群 A_n 称为 n 次交错群，

设 G 是群， H, K 是 G 的非空子集，我们规定 H, K 的乘积为 $HK = \{hk | h \in H, k \in K\}$

特别地，若 $K = \{a\}$ ，则记 $HK = Ha$ ，类似地，可以定义 aH ，

易知，群的子集的乘法运算满足结合律，

另外，我们也规定 $H^{-1} = \{h^{-1} | h \in H\}$ ，

例 2.5 设 H 是群 G 的非空子集，试证明 $N_G(H) = \{x \in G | xHx^{-1} = H\}$ 是 G 的子群，

称 $N_G(H)$ 是 H 在 G 中的正规化子，

证: 因为 e 属于 $N_G(H)$ ，所以 $N_G(H)$ 是 G 的非空子集，

另外，对属于 $N_G(H)$ 的任意 x, y ，有

$xyH(xy)^{-1} = x(yHy^{-1})x^{-1} = xHx^{-1} = H$ 和 $x^{-1}Hx = x^{-1}(xHx^{-1})x = H$ ，

即 xy 和 x^{-1} 属于 $N_G(H)$ ，

因此，根据定理 2.1 知， $N_G(H)$ 是 G 的子群

例 2.6 证明 $H = \{(1), (12)\}$ 和 $K = \{(1), (13)\}$ 都是 S_3 的子群，并求 HK ，

证: 因为 $(1)(1) = (1)$ ， $(1)(12) = (12)$ ， $(12)(12) = (1)$ 都在 H 中，

所以根据定理 2.2 可知， H 是 S_3 的子群，

又因为 $(1)(1) = (1)$ ， $(1)(13) = (13)$ ， $(13)(13) = (1)$ 都在 K 中，

所以根据定理 2.2 可知， K 是 S_3 的子群，

另外， $HK = \{(1), (12), (13), (132)\}$

注意，因为 $(132)^{-1} = (123)$ 不属于 HK ，所以 HK 不是 S_3 的子群

定理 2.3 若 H 和 K 是群 G 的子群，则

(1) $H \cap K$ 是群 G 的子群；

(2) HK 是 G 的子群 $\Leftrightarrow HK = KH$ ；

(3) $H \cup K$ 是 G 的子群 $\Leftrightarrow H$ 包含于 K 或者 K 包含于 H ，

证: (1) G 的单位元在 $H \cap K$ 中，所以 $H \cap K$ 非空，

对属于 $H \cap K$ 的任意 a, b ，易知 ab^{-1} 属于 $H \cap K$ ，因此 $H \cap K$ 是群 G 的子群，

(2)($\Rightarrow$) 设 HK 是 G 的子群，对属于 HK 的任意 hk ，有 $(hk)^{-1}$ 属于 HK ，

即存在属于 H 的 h' ，和属于 K 的 k' ，使得 $(hk)^{-1} = h'k'$ ，

从而 $hk = (h'k')^{-1} = (k')^{-1}(h')^{-1}$ 属于 KH ，即 HK 包含于 KH ，

反之，对属于 KH 的任意 kh ，有 $(kh)^{-1} = h^{-1}k^{-1}$ 属于 HK ，而 HK 是 G 的子群，

因此 HK 的元素的逆元在 HK 中，即 kh 属于 HK ，

从而 KH 包含于 HK ，因此 $HK = KH$ ，

($\Leftarrow$) 设 $HK = KH$ ，显然 e 属于不为空集的 HK ，

又因对属于 H 的任意 h_1, h_2 ，对属于群 K 的任意 k_1, k_2 ，

由已知条件 $HK = KH$ 可知

一定存在有属于 H 的 h' ，和存在有属于 K 的 k' ，使得 $(k_1k_2^{-1})h_2^{-1} = h'k'$ ，

从而 $(h_1k_1)(h_2k_2)^{-1} = h_1(k_1k_2^{-1}h_2^{-1}) = h_1(h'k')$ 属于 HK ，

因此，根据定理 2.1 可知 HK 是 G 的子群，

(3) 充分性是显然的，我们用反证法来证必要性，

若 H 包含于 K 和 K 包含于 H 都不成立，

则在 H 中存在有不属于 K 的 h ，在 K 中存在有不属于 H 的 k ，

但是 h, k 都属于 $H \cup K$ ，

因为 $H \cup K$ 是 G 的子群，所以 hk 属于 $H \cup K$ ，从而 hk 属于 H 或 hk 属于 K ，

若 hk 属于 H ，则 $k = h^{-1}hk$ 属于 H ，这与 k 不属于 H 矛盾，

若 hk 属于 K ，则 $h = hkk^{-1}$ 属于 K ，这与 h 不属于 K 矛盾，

因此假设不成立，即一定有 H 包含于 K 或者 K 包含于 H ，

注意，定理 2.3 的结论(1)可以推广到多个子群的情形，

即若 $H_i (i \text{ 属于 } I)$ 是 G 的子群, 则 $\bigcap_{i \in I} H_i$ 是 G 的子群

在考察群 G 的结构时，不仅其子群的结构能帮助我们更好地把握群 G 的结构，

另外，我们也不可避免地要考察其中元素的性质，

一般来说，通过确定 G 的尽可能少的元素的集合来把握群 G 的性质和结构，

例如，在线性代数中，我们可以通过基底来把握空间，

对于群，也有类似的方法

定义 2.2 设 G 是群， A 是 G 的非空子集，

称 G 的所有包含 A 的子群的交为 A 生成的子群，并记其为 $\langle A \rangle$ ，

特别地，如果 $G = \langle A \rangle$ ，那么称 A 是 G 的生成集，

也称集合 A 生成群 G ，称 A 中的元素为 G 的生成元，

实际上，在没有特别说明的情况下，我们都希望生成集满足最小条件，

即 $\langle A \rangle \neq \langle A - \{a\} \rangle, \forall a \in A$

易知， $\langle A \rangle = \{a_1, a_2 \cdots a_n \mid a_i \in (A \cup A^{-1}), n=1, 2, \dots\}$ ，

一般地，我们把由有限个元素生成的群 ($|A| < \infty$) 叫做有限生成群，

特别地，把由属于 G 的一个元素 a 生成的群 ($A = \{a\}$) 叫做循环群，记为 $\langle a \rangle$ ，

显然， $\langle a \rangle = \{a^r \mid r \in \mathbb{Z}\}$

例 2.7 易知， n 次单位根群 $G = \langle \varepsilon \rangle$ (其中 ε 是 n 次本原单位根)，

剩余类加法群 $\mathbb{Z}_n = \langle \bar{1} \rangle$ ，整数加法群 $\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle = \langle -1 \rangle$ 等都是循环群，

对属于集合 $\mathbb{Z}$ 的任意 n 生成的群为 $\langle n \rangle = \{rn \mid r \in \mathbb{Z}\}$ ，

对属于集合 $\mathbb{Z}_6$ 的任意 $\bar{2}$ 生成的群为 $\langle \bar{2} \rangle = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$ ，

例 2.8 试确定整数加法群 Z 的所有子群，

解： 设 H 是 Z 的子群，若 H 不等于 $\{0\}$ ，则在 H 中存在最小正整数，设为 n ，

对属于 H 的任意 m ，由整数的带余除法有 $m=nq+r$ ，

其中 q, r 都属于 Z ，而 r 大于等于 0 且小于 n ，

因为属于 H 的 $r=m-nq$ ，所以由 n 的取法可知 $r=0$ ，

即 $m=nq$ 属于 $\langle n \rangle$ ，故 H 包含于 $\langle n \rangle$ ，

而 n 属于 H ，由生成群的定义有 $\langle n \rangle$ 包含于 H ，

因此， $H=\langle n \rangle$ ，即整数加法群的子群都是循环群，

而且是由子群中的最小正整数生成的，