关于有限交换群的结构，从推论 8.2 我们知道，

有限交换群可以表示为西罗 p–子群的直和，

本节我们将对有限交换群的结构作更进一步细致的分析，

首先讨论交换 p–群的结构，

引理 9.1 设 G 是交换 p–群，a 是 G 中阶极大的元素，$H=\langle a\rangle\neq G$，

若$\bar{b}$是 G/H 的 p^r 阶元素，

试证明在 G 中存在一个 p^r 阶元素，且其在自然同态下的像是$\bar{b}$，

证: 因为$\bar{b}$的阶为 p^r，所以存在 k，使得$b^{p^r}=a^k$，

若设 b 的阶为 p^s，则$b^{p^s}=e$，

因此$\overline{b^{p^s}}=\bar{e}$，再由$\bar{b}$的阶为 p^r，可知 $p^r|p^s$，其中 $r\leqslant s$，

从而 $e=b^{p^s}=\left(b^{p^r}\right)^{p^{s-r}}=\left(a^k\right)^{p^{s-r}}$，

若设 a 的阶为 p^t，则 $p^t|kp^{s-r}$，即 $p^{t-s+r}\mid k$，

因为 a 是 G 中阶极大的元素，所以 $p^r|k$，

令 $m=p^{t-r}-kp^{-r}$，则 ba^m 的阶为 p^r，且在自然同态下的像是$\bar{b}$，

事实上，$(ba^m)^{p^r}=b^{p^r}a^{p^t-k}=a^ka^{p^t-k}=a^{p^t}=e$，

若 $n<r$ 且$(ba^m)^{p^n}=e$，则

$$e=(ba^m)^{p^n}$$

$$=b^{p^n}a^{p^{n+t-r}-kp^{n-r}}$$

$$=b^{p^n}a^{p^{n+t-r}}a^{-kp^{n-r}}$$

$$=b^{p^n}a^{p^{n+t-r}}b^{-p^n}$$

$$=a^{p^{n+t-r}}$$

这与 a 的阶为 p^t 矛盾，所以 ba^m 的阶为 p^r，

而$\overline{ba^m}=\bar{b}$，即 ba^m 在自然同态下的像是$\bar{b}$，

定理 9.1 有限交换 p–群 G 与有限个循环 p–群的直和同构 ，

若 G 同构于$G_{k_1}\oplus G_{k_2}\oplus,\cdots,\oplus G_{k_r}$ ，其中G_{k_i}是p^{k_i}阶循环群 ，$i=1,2,\cdots,r$，

则整数序列 $k_1\geqslant k_2\geqslant\cdots\geqslant k_r\geqslant 1$ 被 G 唯一确定 ，

证: 由于 G 是交换群 ，所以在下面的证明中我们用“+”表示其中的运算 ，

首先证明分解的存在性 ，

设 G 不是循环群 ，我们对 G 的阶用数学归纳法 ，

设 a_1 是 G 中阶极大的元素 ，并令 a_1 的阶为p^{k_1} ，$G_{k_1}=\langle a_1\rangle$，

因为$|G/G_{k_1}|<|G|$，所以由归纳假设有 $G/G_{k_1}\cong\overline{G_{k_2}}\oplus\cdots\oplus\overline{G_{k_r}}$ ，

其中$\overline{G_{k_i}}$是p^{k_i}阶循环群 ，$i=2,\cdots,r$，且可设 $k_2\geqslant\cdots\geqslant k_r\geqslant 1$，

为了方便 ，我们将上述同构符号表示为等号 ，即 $G/G_{k_1}=\overline{G_{k_2}}\oplus\cdots\oplus\overline{G_{k_r}}$ ，

设$\bar{a}_i$是$\overline{G_{k_i}}$的生成元 ，$i=2,\cdots,r$，由引理 9.1，关于自然同态

$\pi: G\to G/G_{k_1}$存在$\bar{a}_i$的属于 G 的原像 a_i，使得$\bar{a}_i$和 a_i 的阶相同 ，

令$G_{k_i}=\langle a_i\rangle$，则$G_{k_i}(i=2,\cdots,r)$是$p^{k_i}$阶循环群 ，

下面证明 $G=G_{k_1}\oplus G_{k_2}\oplus\cdots\oplus G_{k_r}$

事实上 ，若令 x 属于 G，则可设$\bar{x}=m_2\bar{a}_2+\cdots+m_r\bar{a}_r$ ，其中 $m_2,\cdots,m_r$ 是整数 ，

于是 $x-m_2a_2-\cdots-m_ra_r$ 属于G_{k_1} ，进而可设 $x-m_2a_2-\cdots-m_ra_r=m_1a_1$，

所以 $x=m_1a_1+m_2a_2+\cdots+m_ra_r$ 属于$(G_{k_1}+G_{k_2}+\cdots+G_{k_r})$，

即 $G=G_{k_1}+G_{k_2}+\cdots+G_{k_r}$ ，其中G_{k_i}是p^{k_i}阶循环群 ，$i=1,2,\cdots,r$，

现任取属于$\left(G_{k_i}\cap\left(\sum_{j\neq i}G_{k_j}\right)\right)$的 x，并设 $x=-m_ia_i=\sum_{j\neq i}m_ja_j$

则$\sum_{j=1}^{r}m_ja_j=0$，$\sum_{j\neq 1}m_j\bar{a}_j=\bar{0}$，从而$m_j\bar{a}_j=\bar{0}(j\neq 1)$，于是$p^{k_j}\mid m_j$

因而 $m_ja_j=0(j\neq 1)$，从而 $x=0$，

故 $G=G_{k_1}\oplus G_{k_2}\oplus,\cdots,\oplus G_{k_r}$ ，其中G_{k_i}是p^{k_i}阶循环群 ，$i=1,2,\cdots,r$，

然后证明分解式的唯一性 ，

对整数序列 $k_1\geqslant k_2\geqslant\cdots\geqslant k_r\geqslant 1$ 用数学归纳法 ，

设 $G=G_{k_1}\oplus G_{k_2}\oplus\cdots\oplus G_{k_r}=G_{l_1}\oplus G_{l_2}\oplus\cdots\oplus G_{l_s}$ ，

且 $k_1\geqslant k_2\geqslant\cdots\geqslant k_r\geqslant 1$, $l_1\geqslant l_2\geqslant\cdots\geqslant l_s\geqslant 1$

显然 pG 也是 $p-$群 ，并且

$pG=pG_{k_1}\oplus pG_{k_2}\oplus\cdots\oplus pG_{k_r}=pG_{l_1}\oplus pG_{l_2}\oplus\cdots\oplus pG_{l_s}$ ，

它们对应的整数序列分别为

$k_1-1\geqslant k_2-1\geqslant\cdots\geqslant k_r-1\geqslant 0$ 和 $l_1-1\geqslant l_2-1\geqslant\cdots\geqslant l_s-1\geqslant 0$,

其中当某些指数 k_i , $l_j=1$ 时 ，对应于p^{k_i-1}和p^{l_j-1}的直和因子为平凡子群 ，

所以由归纳假设 ，存在整数 n ,

使得 $k_1=l_1$, $\cdots$, $k_n=l_n$, $k_{n+1}=\cdots=k_r=l_{n+1}=\cdots=l_s=1$,

进一步有 , $|G|=p^{k_1+\cdots+k_n}p^{r-n}=p^{l_1+\cdots+l_n}p^{s-n}$ ，于是 $s=r$ ，且 $k_i=l_i$, $i=1$, 2 , $\cdots$, s

实际上，若 G 同构于 $G=G_{k_1}\oplus G_{k_2}\oplus\cdots\oplus G_{k_r}$ ，其中G_{k_i}是p^{k_i}阶循环群 , $i=1$, 2 , $\cdots$, r

则$G_{k_i}\cong Z_{p^{k_i}}$ ，从而 , G 同构于$Z_{p^{k_1}}\oplus Z_{p^{k_2}}\oplus\cdots\oplus Z_{p^{k_r}}$ ，

若$|G|=p^k$, $G\cong Z_{p^{k_1}}\oplus Z_{p^{k_2}}\oplus\cdots\oplus Z_{p^{k_r}}$则必有$p^k=p^{k_i}p^{k_2}\cdots p^{k_r}$ ，

因此 ，若求所有互不同构的p^k阶交换群 ，

即首先要将p^k表示成素数幂的乘积的形式 ，然后写出对应群 ，

易知 ，同构是群的一个等价关系 ，这个等价关系决定的等价类又称为同构类 ，

我们常常以同构类中的一个代表元表示这个同构类 ，

例 9.1 写出 81 阶交换群的所有同构类，

解: 首先将 81 表示成所有可能的素数幂的乘积的形式，

显然 $3^4=3^3\times3=3^2\times3^2=3^2\times3\times3=3\times3\times3\times3$，

根据定理 9.1，81 阶交换群的所有同构类为

Z_{81}

$Z_{27}\oplus Z_3$

$Z_9\oplus Z_9$

$Z_9\oplus Z_3\oplus Z_3$

$Z_3\oplus Z_3\oplus Z_3\oplus Z_3$

例 9.2 写出 32 阶交换群的所有同构类，

解: 首先将 32 表示成所有可能的素数幂的乘积的形式，

$2^5=2^4\times2=2^3\times2^2=2^3\times2\times2=2^2\times2^2\times2=2^2\times2\times2\times2=2\times2\times2\times2\times2$

根据定理 9.1，32 阶交换群的所有同构类为

Z_{32}

$Z_{16}\oplus Z_2$

$Z_8\oplus Z_4$

$Z_8\oplus Z_2\oplus Z_2$

$Z_4\oplus Z_4\oplus Z_2$

$Z_4\oplus Z_2\oplus Z_2\oplus Z_2$

$Z_2\oplus Z_2\oplus Z_2\oplus Z_2\oplus Z_2$

定义 9.1 设 n 是大于 1 的整数，若 n 的素数分解式为 $n=p_1^{t_1}p_2^{t_2}\cdots p_s^{t_s}$，

其中 $t_i\geqslant1$，$p_i(i=1,2,\cdots,s)$是素数(不要求互异)，

则称$\{p_1^{t_1}p_2^{t_2}\cdots p_s^{t_s}\}$是 n 的一个初等因子组，

由推论 8.2 我们知道，有限交换群可以表示成西罗 p–子群的直和，

根据定理 9.1 可知，每个 p–子群同构于有限个循环群的直和，

因此，对于有限交换群，我们有如下推论:

推论 9.1 设 G 是有限交换群，若$|G|=n>1$，则 $G\cong Z_{p_1^{k_1}}\oplus Z_{p_2^{k_2}}\oplus\cdots\oplus Z_{p_n^{k_n}}$

其中$\{p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_s^{k_s}\}$是 n 的一个初等因子组，

另外，两个阶大于 1 的有限交换群同构的充分必要条件是

它们的阶有相同的初等因子组，

这就是说，若能给出 n 的所有初等因子组，

我们就可以写出所有 n 阶交换群的同构类，

例 9.3 求 36 阶交换群的所有同构类，

解: 首先将 36 分解成素数幂的乘积的形式:

$2^2\times3^2=2\times2\times3^2=2^2\times3\times3=2\times2\times3\times3$

从而 36 的初等因子组为

$\{2^2,3^2\},\{2,2,3^2\},\{2^2,3,3\},\{2,2,3,3\}$

根据推论 9.1 可知，36 阶交换群的同构类为

$Z_4\oplus Z_9$，

$Z_2\oplus Z_2\oplus Z_9$，

$Z_4\oplus Z_3\oplus Z_3$，

$Z_2\oplus Z_2\oplus Z_3\oplus Z_3$，

例 9.4 求 72 阶交换群的所有同构类 ，

解: 首先将 72 分解成素数幂的乘积的形式:

$2^3\times3^2=2^2\times2\times3^2=2\times2\times2\times3^2=2^3\times3\times3=2^2\times2\times3\times3=2\times2\times2\times3\times3$

从而 72 的初等因子组为

$\{2^3,3^2\},\{2^2,2,3^2\},\{2,2,2,3^2\},\{2^3,3,3\},\{2^2,2,3,3\},\{2,2,2,3,3\}$,

根据推论 9.1 可知 ，72 阶交换群的同构类为

$Z_8\oplus Z_9$,

$Z_4\oplus Z_2\oplus Z_9$,

$Z_8\oplus Z_3\oplus Z_3$,

$Z_2\oplus Z_2\oplus Z_2\oplus Z_9$,

$Z_4\oplus Z_2\oplus Z_3\oplus Z_3$,

$Z_2\oplus Z_2\oplus Z_2\oplus Z_3\oplus Z_3$,

定义 9.2 设 n 是一个正整数 ，若 n 的分解式为 $n=h_1h_2\cdots h_r$,

其中 $h_i|h_{i-1},i=2,3,\cdots,r$ ，则称$\{h_1,h_2,\cdots,h_r\}$是 n 的一个不变因子组 ，

对每一个正整数 ，我们可以用其初等因子组求其不变因子组 ，

具体方法为: 在一个初等因子组中取不同素数的最高乘幂作乘积 ，

然后将这些乘幂去掉 ，在剩下的素数乘幂中 ，

重复以上过程 ，直至所有的素数乘幂都已经去掉 ，就得到一个不变因子组 ，

对每一个初等因子组重复以上过程 ，则可得到所有的不变因子组 ，

推论 9.2 设 G 是有限交换群 ，若$|G|=n>1$ ，则 $G\cong Z_{h_1}\oplus Z_{h_2}\oplus\cdots\oplus Z_{h_r}$

其中$\{h_1,h_2,\cdots,h_r\}$是 n 的一个不变因子组 ，

另外 ，两个阶大于 1 的有限交换群同构的充分必要条件是

它们的阶有相同的不变因子组 ，

例 9.5 求 36 的不变因子组及相应的同构类 ，

解: 因为 36 的初等因子组为

$\{2^2, 3^2\}, \{2, 2, 3^2\}, \{2^2, 3, 3\}, \{2, 2, 3, 3\},$

所以 36 的不变因子组为

$\{2^2\times3^2\}, \{2\times3^2, 2\}, \{2^2\times3, 3\}, \{2\times3, 2\times3\},$

因此 ，36 阶交换群的同构类又可以表示为

Z_{36} ，

$Z_{18}\oplus Z_2$ ，

$Z_{12}\oplus Z_3$ ，

$Z_6\oplus Z_6$ ，

例 9.6 求 72 的不变因子组及相应的同构类 ，

解: 因为 72 的初等因子组为

$\{2^3, 3^2\}, \{2^2, 2, 3^2\}, \{2, 2, 2, 3^2\}, \{2^3, 3, 3\}, \{2^2, 2, 3, 3\}, \{2, 2, 2, 3, 3\},$

所以 72 的不变因子组为

$\{2^3\times3^2\}, \{2^2\times3, 2^2\}, \{2\times3^2, 2, 2\}, \{2^3\times3, 3\}, \{2^2\times3, 2\times3\}, \{2\times3, 2\times3, 2\}$

因此 ，72 阶交换群的同构类又可以表示为

Z_{72} ，

$Z_{36}\oplus Z_2$ ，

$Z_{24}\oplus Z_3$ ，

$Z_{12}\oplus Z_6$ ，

$Z_{18}\oplus Z_2\oplus Z_2$ ，

$Z_6\oplus Z_6\oplus Z_2$ ，