

1, 设 H 是群 G 的子群, 则 H 的所有左陪集中是否有 G 的子群?

都是哪些?为什么?

解: 若 aH 是 G 的子群, 则存在有属于 H 的 h , 使得 ah 等于 e ,

从而有 $a=h^{-1} \in H, aH=H$, 即左陪集中仅有 H 是 G 的子群,

2, 求剩余类加法群 Z_{12} 的等于 $\{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}\}$ 的子群 H 的所有左陪集,

解: 等于 $\{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}\}$ 的子群 H 的所有左陪集为 $H, \bar{1}+H, \bar{2}+H, \bar{3}+H,$

3, 试用拉格朗日定理证明每一个 p (p 是素数) 阶群都是循环群,

并且该循环群以每一个非单位元作为它的生成元,

证明: 设 G 是 p 阶群, 不等于 e 的任意 a 属于 G, a 的阶是 p 的因数且不等于 1

所以 a 的阶是 $p, \langle a \rangle = G,$

4, 试证明定理 3.4,

证明: (1) $\Rightarrow$ (2), 由于 H 是 G 的正规子群, 从而对属于群 G 的任意 g , 都有

$gH=Hg$, 因此 $gHg^{-1}=H$,

(2) $\Rightarrow$ (3), (3) $\Rightarrow$ (4)显然成立

(4) $\Rightarrow$ (1), 由 ghg^{-1} 属于 H , 任意 h 属于 H 和任意 g 属于 G , 可知 gHg^{-1} 包含于 H

另一方面, 对属于 H 的任意 h , 都有 $h=g(g^{-1}hg)g^{-1}$,

由于 g^{-1} 属于 G , 从而 $g^{-1}hg$ 属于 H , 即 h 属于 gHg^{-1} ,

由 H 的任意性可知 H 包含于 gHg^{-1} ,

故 H 等于 gHg^{-1} , 即 gH 等于 Hg , 故 H 是 G 的正规子群

5, 写出商群 $GL_n(R)/SL_n(R)$ 中的单位元和每个元素的逆元,

解: 单位元为 $SL_n(R)$, 元素 $A \in SL_n(R)$ 的逆元为 $A^{-1} \in SL_n(R)$,

6, 设等于 $\{\bar{0}, \bar{4}\}$ 的 H 是 $\{Z_8; +\}$ 的子群, 试求商群 Z_8/H 的所有元素,

解: 商群 Z_8/H 有四个元素: $H, \bar{1}+H, \bar{2}+H, \bar{3}+H$

7, 试找出 S_3 的所有正规子群和商群, 并计算每个商群的阶,

解: $|S_3|=6$, S_3 的子群的阶为 1, 2, 3, 6,

1 阶子群为 $\{(1)\}$, 6 阶子群为 S_3 , 2, 3 阶子群为循环群,

所以 S_3 的 2 阶子群为 $\langle(12)\rangle, \langle(13)\rangle, \langle(23)\rangle$,

3 阶子群为 $\langle(123)\rangle = \langle(132)\rangle$,

由于 $(123)(12)(123)^{-1} = (123)(12)(132) = (23)$ 不属于 $\langle(12)\rangle$,

因此 $\langle(12)\rangle$ 不是正规子群,

同理 $\langle(13)\rangle, \langle(23)\rangle$ 不是正规子群,

又因指数为 2 的子群是正规子群, 从而 $\langle(123)\rangle = \langle(132)\rangle$ 是 S_3 的正规子群,

因此 S_3 的全部正规子群为 $\{(1)\}, \langle(123)\rangle, S_3$

且 S_3 的商群的阶分别为 $|S_3/\{(1)\}|=6, |S_3/\langle(123)\rangle|=2, |S_3/S_3|=1$,

8, 已知 $G = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right\}$

关于矩阵的乘法是群, 试证明 G 的每个子群都是正规子群, 其中 i 是虚数单位,

证明: $|G|=8$, 所以由拉格朗日定理知 G 有 1, 2, 4, 8 阶子群,

1, 8 阶子群是正规子群, 4 阶子群的指数为 2, 也是正规子群,

在 G 中只有一个 2 阶子群 $\left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, 易知 $\left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ 为正规子群,

9, 令 $H = \{(1), (13)\}, K = \{(1), (13), (24), (13)(24)\}$

和 $G = \{(1), (13), (24), (13)(24), (12)(34), (14)(23), (1234), (1432)\}$

是对称群 S_4 的子群,

试证明 H 是 K 的正规子群, K 是 G 的正规子群, 但 H 不是 G 的正规子群,

证明: $\frac{|G|}{|K|}=2, \frac{|K|}{|H|}=2$, 所以 K 是 G 的正规子群, H 是 K 的正规子群,

而 $(1234)(13)(1234)^{-1} = (24)$ 不属于 H , 所以 H 不是 G 的正规子群,

10, 设 $C(G)$ 是群 G 的中心, $G/C(G)$ 是循环群, 证明 G 是交换群,

证明: 设 $G/C(G) = \langle \bar{a} \rangle$, a 属于 G ,

则对属于群 G 的任意 x, y , 存在属于 Z 的 k, l , 使 $\bar{x} = \bar{a}^k, \bar{y} = \bar{a}^l$

于是存在属于 $C(G)$ 的 c_1, c_2 , 使得 $x = a^k c_1, y = a^l c_2$

从而 $xy = a^k c_1 a^l c_2 = a^k a^l c_2 c_1 = a^l a^k c_2 c_1 = a^l c_2 a^k c_1 = yx$, 所以 G 为交换群,

11, 设 H 是群 G 的非空子集,

试证明 H 在 G 中的中心化子 $C_G(H)$ 是正规化子 $N_G(H)$ 的正规子群,

解: 显然, $C_G(H)$ 包含于 $N_G(H)$,

对属于 $C_G(H)$ 的任意 a , 对属于 $N_G(H)$ 的任意 b , 和对属于 H 的任意 h

存在有属于 H 的 h' , 使得 $b^{-1}h = h'b^{-1}$

所以 $(bab^{-1})h = bah'b^{-1} = bh'ab^{-1} = hbab^{-1}$

12, 设 H 是群 G 的子群, 试证明 H 是 $N_G(H)$ 的正规子群,

证明: 显然 H 是它的等于 $\{g \in G | gHg^{-1} = H\}$ 的正规化子 $N_G(H)$ 的子群,

对属于 H 的任意 h , 和对属于 $N_G(H)$ 的任意 g , 有 ghg^{-1} 属于 H ,

所以 H 是 $N_G(H)$ 的正规子群,

13, 设 H, K 是群 G 的正规子群, 试证明

(1) HK 是 G 的正规子群;

(2) 若 $H \cap K = \{e\}$, 则对属于 H 的任意 h 和对属于 K 的任意 k , 都有 $hk = kh$,

证明: (1) 由子群的判别定理可知 HK 是群 G 的子群,

对属于 H 的任意 h , 对属于 K 的任意 k 和对属于 G 的任意 g ,

都有 $g(hk)g^{-1} = (ghg^{-1})(gkg^{-1})$ 属于 HK , 所以 HK 是 G 的正规子群,

(2) $hkh^{-1}k^{-1}$ 属于 $(H \cap K)$

14, 设 H 是群 G 的正规子群, 若 $|H|=2$, 试证明 H 包含于 $C(G)$,

证明: 设等于 $\{e, a\}$ 的 H 是群 G 的正规子群,

对属于群 G 的任意 g , 有 gag^{-1} 属于 H

因为 $gag^{-1} \neq e, gag^{-1} = a$, 即 $ga=ag$, 所以 H 含于群 G 的中心,

15, 设 H, K 是群 G 的有限子群, 试证明 $|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|}$

证明: HK 是所有形如 hK 的左陪集的并, 设左陪集个数为 n , 则 $|HK|=n|K|$,

设 $H \cap K$ 在 H 中左陪集个数为 m , 证 $m=n$ 即可,

又显然 $hK \rightarrow h(H \cap K)$ 是双射, 故 $m=n$,

习题 1 证明有限群 G 的子群 H 的左陪集的个数和右陪集的个数相等,

证明: 因为 $\varphi: H \rightarrow aH, h \rightarrow ah$ 是双射,

所以左陪集的个数等于 G 的阶数除以 H 的阶数,

同理右陪集的个数也等于 G 的阶数除以 H 的阶数, 因此左、右陪集的个数相等

习题 2 在 $\mathbb{Z}$ 中求子群 $\langle 4 \rangle$ 的所有左陪集,

解: 子群 $\langle 4 \rangle$ 的所有左陪集为 $\langle 4 \rangle, 1+\langle 4 \rangle, 2+\langle 4 \rangle, 3+\langle 4 \rangle,$

习题 3 证明 1, 2, 3, 4, 5 阶群是交换群, S_3 不是交换群,

证明: 显然, 1 阶群是交换群,

因为素数阶群是循环群, 循环群是交换群, 所以 2、3、5 阶群是交换群,

设 4 阶群为 $\{e, a, b, c\}$, 由群的消去律知 $ab \neq e$ 和 $ac \neq e$ 中至少有一个成立,

不妨设 $ab \neq e$, 则 $ab=c$, 若 $ba=e$, 则 $ab=e$, 矛盾,

所以 $ba \neq e, ba=c$, 即 4 阶群为交换群,

在 S_3 中 $(12)(13) \neq (13)(12)$, 所以 S_3 不是交换群,

习题 4 判断下列集合关于集合的乘法运算是否是群:

(1) $G = \{aH | a \in S_3\}$, 其中 $H = \{(12)\} \subseteq S_3$

(2) $G = \{aH | a \in S_3\}$, 其中 $H = \{(12), (123)\} \subseteq S_3$

(3) $G = \{aH | a \in S_3\}$, 其中 $H = \{(1), (123), (132)\} \subseteq S_3$

(4) $G = \{aH | a \in S_3\}$, 其中 $H = \{(1), (12)\} \subseteq S_3$

(5) $G = \{aH | a \in \mathbb{Z}\}$, 其中 $H = \{0, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \dots\} \subseteq \mathbb{Z}$

(6) $G = \{aH | a \in \mathbb{Z}\}$, 其中 $H = \{0, 3, 6, 9, \dots\} \subseteq \mathbb{Z}$

解: (3)和(5)中的 H 是正规子群, 因此 G 关于集合的乘法运算是群,

(1)因为 $aHbH = \{a(12)b(12)\}$, 即 $aHbH = cH, c = a(12)b$, 所以 G 是半群,
显然, $(12)H$ 是单位元, aH 的逆元为 $\{(12)a^{-1}\} = (12)a^{-1}(12)H$, 因此 G 是群,

(2)若 $a = (13), b = (23)$, 则 $aHbH = \{(1), (13), (23), (132)\}$ 不属于 G ,
所以 G 不是群,

(4)若 $a = (13), b = (23)$, 则 $aHbH = \{(1), (12), (23), (132)\}$ 不属于 G ,
所以 G 不是群,

(6)因为 $HH = H, aHbH = abH$, 所以 G 是群,

习题 5 证明正规子群与子群的乘积是子群,

证明: 设 H 是群 G 的正规子群, K 是 G 的子群, 下证 HK, KH 是 G 的子群,

对属于群 H 的任意 h_1, h_2 , 和对属于群 K 的任意 k_1, k_2 ,

有 $(h_1k_1)(h_2k_2)^{-1} = h_1(k_1k_2^{-1})h_2^{-1}(k_2k_1^{-1})(k_1k_2^{-1})$,

因为 H 是 G 的正规子群, K 是 G 的子群,

所以 $(k_1k_2^{-1})h_2^{-1}(k_2k_1^{-1})$ 属于 $H, k_1k_2^{-1}$ 属于 K ,

从而 $(h_1k_1)(h_2k_2)^{-1}$ 属于 HK , 即 HK 是 G 的子群,

因为 HK 是子群, 所以 $KH = HK$ 是 G 的子群,

习题 6 举例说明子群的乘积不一定是子群

解: S_3 的子群 $H = \{(1), (12)\}$ 和 $K = \{(1), (13)\}$ 的乘积

$HK = \{(1), (13), (12), (132)\}$ 不是 S_3 的子群

习题 7 证明群的中心是正规子群，

证明: 设群 G 的中心为 C , C 是 G 的子群，

且对属于群 G 的任意 g 和对属于群 C 的 x ，都有 $gxg^{-1}=xgg^{-1}=x$ 属于 C

所以 C 是 G 的正规子群，

习题 8 设 H 是群 G 的子群，

试证明当且仅当 H 是正规子群时， H 的任意两个左陪集的乘积仍是左陪集，

证明: 必要性，对任意两个左陪集 xH, yH ，

设 $xHyH=zH$ ，则 $xy=xeye$ 属于 zH ，从而 $xyH=zH$ ，即 $xHyH=xyH$ ，

对属于群 G 的任意 x ，都有 $xHx^{-1}H=H$ ，

所以对属于群 H 的任意 h ，都有 xhx^{-1} 属于 H ，

从而 xh 属于 Hx ，即 xH 包含于 Hx ，

同理可证 Hx 包含于 xH ，所以 $xH=Hx$ ， H 是正规子群，

充分性显然，

习题 9 令 $H=\{A \in GL_n(R) | \det(A)=\pm 1\}$ ，试证明 H 是 $GL_n(R)$ 的正规子群，

证明: 设 g 属于 $GL_n(R)$ ， h 属于 H ，则 $\det(ghg^{-1})=\det(h)=\pm 1$ ，

所以 ghg^{-1} 属于 H ， H 是 $GL_n(R)$ 的正规子群，

习题 10 令 $H=\{(a_{ij}) \in GL_n(R) | a_{ij}=0, i \neq j\}$ ，试证明 H 不是 $GL_n(R)$ 的正规子群，

证明: 设 $h=(a_{ij})$ 属于 H ， $a_{11} \neq a_{22}$ ， $g=E+E_{12}$ ，

则 $ghg^{-1}=(E+E_{12})h(E-E_{12})=h+(a_{22}-a_{11})E_{12}$ 不属于 H ，

所以 H 不是 $GL_n(R)$ 的正规子群，

习题 11 设 H 是 G 的正规子群，

试证明当且仅当 $a^{-1}b^{-1}ab$ 属于 H 时， G/H 是交换群，其中任意 a, b 属于 G ，

证明: G/H 是交换群 $\Leftrightarrow \bar{a}\bar{b} \Leftrightarrow \bar{b}\bar{a} \Leftrightarrow abH \Leftrightarrow baH \Leftrightarrow a^{-1}b^{-1}ab$ 属于 H ，

习题 12 由群 G 的元素 a, b 所做成的元素 $a^{-1}b^{-1}ab=[a, b]$ 叫做 a 与 b 的换位子， G 中所有换位子生成的子群叫做 G 的换位子群，记作 $[G, G]$ ，

试证明

(1) $[G, G]$ 是 G 的正规子群；

(2) $G/[G, G]$ 是交换群；

(3) 如果 H 是 G 的正规子群且 G/H 为交换群，那么 $[G, G]$ 是 H 的子群

证明:

(1) 对属于群 G 的任意 a, b, g ，有

$$g[a, b]g^{-1} = ga^{-1}b^{-1}abg^{-1} = (ga^{-1}g^{-1})(gb^{-1}g^{-1})(gag^{-1})(gbg^{-1}) = [gag^{-1}, gbg^{-1}] \in [G, G]$$

因此 $[G, G]$ 是 G 的正规子群，

(2) 由上题可知，

(3) 对属于群 G 的任意 a, b ，因为 G/H 是交换群，所以 $(ab)H = (ba)H$ ，

又因为 H 是 G 的正规子群，所以 $(ba)^{-1}(ab) \in H$ ， $[a, b] \in H$ ，故 $[G, G]$ 是 H 的子群

习题 13 求 S_3, A_4 的换位子群，

解:

(1) S_3 的正规子群仅有 $H = \{(1)\}$ ， $A_3 = \{(1), (123), (132)\}$ ， S_3

而 $S_3/H \cong S_3$ 不是交换群， $S_3/A_3 = \{\overline{(1)}, \overline{(12)}\}$ 为交换群，

再有群 G 的换位子群 $[G, G]$ 是使商群 G/H 为交换群的最小正规子群 H ，

则群 S_3 的换位子群为 $A_3 = \{(1), (123), (132)\}$ ，

(2) 因为 A_4 不是交换群，所以 $[A_4, A_4]$ 不等于 $\{(1)\}$ ，

令 $K = \{(1), (12)(34), (14)(23), (13)(24)\}$ ，易知 K 为 A_4 的正规子群，

又因为商群 A_4/K 为 3 阶群，因此是循环群，从而就是交换群，

所以 $[A_4, A_4]$ 是 K 的子群，

又因为 K 中的子群只有 $\{(1)\}$ 与 K 本身是 G 的正规子群，而 $[A_4, A_4]$ 不等于 $\{(1)\}$ ，

所以 $[A_4, A_4] = K$ ，

习题 14 试证明交换群的商群还是交换群，

证明: 设 H 是交换群 G 的子群，则对属于 G/H 的任意 xH, yH

有 $(xH)(yH) = (xyH) = (yxH) = (yH)(xH)$,

所以 G/H 是交换群，

习题 15 分别求商群 $Z/\langle 6 \rangle$ 和 S_n/A_n 的所有子群，

解: Z 中包含 $\langle 6 \rangle$ 的子群有 $\langle 1 \rangle, \langle 2 \rangle, \langle 3 \rangle, \langle 6 \rangle$

所以 $Z/\langle 6 \rangle$ 的子群有 $\langle 1 \rangle/\langle 6 \rangle, \langle 2 \rangle/\langle 6 \rangle, \langle 3 \rangle/\langle 6 \rangle, \langle 6 \rangle/\langle 6 \rangle$,

S_n/A_n 的阶为 2，子群为平凡子群 A_n/A_n 和 S_n/A_n ，

习题 16 试证明当且仅当 G/H 是单群时， H 是 G 的极大正规子群，

证明: 必要性，若 K/H 是 G/H 的正规子群，

则由[第二章定理 3.3]可知， K 是 G 的包含 H 的正规子群，

由 H 的极大性可知， $K=H$ 或 $K=G$ ，

从而 K/H 是 G/H 的平凡正规子群， G/H 是单群，

充分性， K 是 G 的包含 H 的正规子群，则 K/H 是 G/H 的正规子群，

因为 G/H 是单群，所以 $K=H$ 或 $K=G$ ，因此， H 是 G 的极大正规子群

习题 17 设 p, q 是两个素数且 p 小于 q ，试证明 pq 阶群 G 最多有一个 q 阶子群

证明: 设 H, K 是 G 的两个 q 阶子群，则 $H \cap K$ 是 H 的子群，

由拉格朗日定理可知 $|H \cap K| = 1$ 或 q ，由[习题 2.3 的题 15]得 $|H \cap K| |HK| = q^2$

若 $|H \cap K| = 1$ ，则 $|HK| = q^2$ 大于 $|G|$ ，矛盾，所以 $|H \cap K| = q$ ，从而 $H=K$

习题 18 试证明 S_n 可由 $n-1$ 个对换 $(12), (13), \dots, (1n)$ 生成

证明: 根据[第二章引理 3.1]，

若 $\sigma = (i_1 i_2 \cdots i_t)$ 是 S_n 的一个轮换， τ 是 S_n 的任意一个置换，

则 $\tau \sigma \tau^{-1} = (\tau(i_1) \tau(i_2) \cdots \tau(i_t))$ ，那么 $(ij) = (1i)(1j)(li)$ ，

习题 19 试证明 S_n 可由 $n-1$ 个对换 $(12), (23), (34), \dots, (n-1, n)$ 生成

证明: $(23)(34)\cdots(i-1, i)=(23\cdots i)$,

令 $\tau^{-1}=(2\cdots i)$, 则 $\tau(12)\tau^{-1}=(1i)$, 再由习题 18 得证,

习题 20 试证明 S_n 可由轮换 $(123\cdots n)$ 和 (12) 生成,

证明: 由 $(123\cdots n)^i(12)(123\cdots n)^{-i}=(1+i, 2+i)$ 及习题 19 即可得证,

习题 21 设 n 大于 2, 证明 S_n 的中心为 $\{(1)\}$,

证明: 由上题知 S_n 由轮换 $(123\cdots n)$ 和 (12) 生成,

若 σ 属于 S_n 的中心, 则 σ 与 $(123\cdots n)$ 和 (12) 可交换,

由 $(12)=\sigma(12)\sigma^{-1}=(\sigma(1)\sigma(2))$ 得 $\sigma(1)=1, \sigma(2)=2$ 或 $\sigma(1)=2, \sigma(2)=1$,

再由 $(12\cdots n)=\sigma(12\cdots n)\sigma^{-1}=(\sigma(1)\sigma(2)\cdots\sigma(n))$ 知 $\sigma(1)=1, \sigma(2)=2, \dots, \sigma(n)=n$,

即 $\sigma=(1)$, S_n 的中心为 $\{(1)\}$,

习题 22 设 n 大于 4, 证明 S_n 中只有一个非平凡正规子群,

证明: 我们知道 A_n 是 S_n 的正规子群,

若 H 是 S_n 的另一个非平凡的正规子群,

则由 A_n 是单群可知 $A_n \cap H = \{(1)\}$ 或 $A_n \cap H = A_n$,

若 $A_n \cap H = \{(1)\}$, 则由 $|A_n \cap H| |A_n H| = |A_n| |H|$ 及 $2|A_n| = |S_n|$ 可知 $|H|=2$,

根据[习题 2.3 的题 14]知 H 含在 S_n 的中心中, 这与上题结论矛盾,

若 $A_n \cap H = A_n$, 则 A_n 包含于 H , H 中有奇置换,

若一个置换群含有奇置换,

则奇置换的个数不小于偶置换的个数, 从而 $H=S_n$ 矛盾,

综上, S_n 中只有三个正规子群: $\{(1)\}, A_n, S_n$