定义 3.1 设 H 是群 G 的子群，a 属于 G，
称集合 aH(或 Ha)为 H 的左陪集(或右陪集)，称 a 为 aH(或 Ha)的代表元，
显然，对属于 H 的任意 h，有 hH=H，特别地，eH=H，
若 G 是交换群，则 aH=Ha，此时左陪集 aH(或右陪集 Ha)可以记为 a+H，

例 3.1 试求 Z_4 的等于$\{\bar{0}，\bar{2}\}$的子群 H 的所有左陪集，

解: 因为$\bar{0}$+H=$\{\bar{0}，\bar{2}\}$=H，$\bar{1}$+H=$\{\bar{1}，\bar{3}\}$，$\bar{2}$+H=$\{\bar{0}，\bar{2}\}$，$\bar{3}$+H=$\{\bar{3}，\bar{1}\}$，

所以 H 的所有左陪集为 H 和$\bar{1}$+H，

例 3.2 试求 S_3 的等于{(1)，(13)}的子群 K 的所有左陪集和右陪集，
解: 因为(1)K={(1)，(13)}=(13)K，
(12)K={(12)，(132)}=(132)K，
(23)K={(23)，(123)}=(123)K，
所以 K 的所有左陪集为 K，(12)K 和(23)K，
因为 K(1)={(1)，(13)}=K(13)，
K(12)={(12)，(123)}=K(123)，
K(23)={(23)，(132)}=K(132)，
所以 K 的所有右陪集为 K，K(12)和 K(23)，
注意，(12)K≠K(12)，(23)K≠K(23)，

例 3.3 试求整数加法群 Z 的子群⟨n⟩的所有左陪集，
解: 因为⟨n⟩={nr|r∈Z}，
所以⟨n⟩的所有左陪集为: 0+⟨n⟩=$\bar{0}$，1+⟨n⟩=$\bar{1}$，⋯，n−1+⟨n⟩=$\overline{n-1}$
即⟨n⟩的所有左陪集构成的集合就是模 n 的剩余类集合 Z_n，

命题 3.1 设 H 是群 G 的子群，则对属于 G 的任意 a , b，下列结论等价:

(1)aH=bH ;

(2)b 属于 aH ;

(3)存在属于 H 的 h，使得 b=ah ;

(4)$a^{-1}b$ 属于 H，

证: (2)⇒(3)⇒(4)是显然的，所以我们仅需给出(1)⇒(2)和(4)⇒(1)的证明，

(1)⇒(2)因为 e 属于 H，所以 b=be 属于 bH=aH，

(4)⇒(1)令 $a^{-1}b=h$，则 b=ah，

所以对属于 H 的任意 h'，有 bh'=ahh' 属于 aH，即 bH 包含于 aH，

类似地，由 $a=bh^{-1}$ 可得 aH 包含于 bH，因此，aH=bH，

以上结论对于右陪集同样成立，

命题 3.2 设 H 是群 G 的子群，则

(1)对属于群 G 的任意 a，都有 a 属于 aH，

(2)对属于群 G 的任意 a , b，都有 aH=bH 或者 aH∩bH=∅

(3)$G=\bigcup_{a\in G} aH$

证(2): 如果(aH∩bH)不等于空集，则存在属于(aH∩bH)的元素 x，

由命题 3.1 得 aH=xH=bH，所以 aH=bH，

命题 3.2 说明，当给定一个群的子群时，

这个子群的所有左陪集构成的集合就是该群的一个分类，

当然上述关于左陪集的结论对右陪集也同样成立，

定义 3.2 设 G 是群，H 是 G 的子群，

称 H 的互不相同的左陪集的个数为 H 在群 G 中的指数，记为|G : H|，

定理 3.1 设 G 是有限群，H 是 G 的子群，则$|G|=|G:H||H|$，

证: 在子群 H 与它的任一个左陪集 aH 之间存在一个双射: $\varphi: H\to aH$，$h\to ah$，

因此$|H|=|aH|$，

由命题 3.2 知，左陪集的集合是 G 的一个分类，所以$|G|=|G:H||H|$，

类似地，在子群 H 与它的任一个右陪集之间也存在双射，

因而，左陪集和右陪集所含元素的个数相等，

推论 3.1 有限群 G 的子群 H 的阶是 G 的阶的因数，

显然，素数阶群仅有平凡子群，

例如交错群 A_3 和剩余类加法群$\{Z_p;+\}$都只有平凡子群，(p 是素数)，

推论 3.2 设 H，K 是有限群 G 的子群，若 H 包含于 K，则$|G:H|=|G:K||K:H|$

下面我们对陪集的结构和性质作进一步的考察，

即把所有陪集作为一个整体来考察，看它能否构成一个群?

以左陪集为例进行分析，

令 G 是群，H 是 G 的子群，H 的所有左陪集构成的集合为$\Sigma_H=\{aH|a\in G\}$，

我们知道在群 G 的子集间有乘法运算

即对属于集合Σ_H的任意 aH，bH，有$(aH)(bH)=aHbH$，

但这个运算不一定是Σ_H的运算，即 aHbH 不一定是左陪集，

要想使得 aHbH 是左陪集，一个最简单、直接的方式就是:

子群 H 满足等式 $aH=Ha$(任意 a 属于 G)，则此时一定有$(aH)(bH)=aHbH=abH$

那么，这样的子群存在吗?

很明显，如果群 G 是交换群，则 G 的任意子群都满足上述要求的条件，

但是，如果群 G 不是交换群呢?

例 3.4 令等于{(1),(13)}的 K 是对称群 S_3 的一个子群，
在例 3.2 中，我们得到(12)K 不等于 K(12)，
但是，如果我们考虑对称群 S_3 的等于{(1),(123),(132)}的子群 A_3，
则可以验证它可使等式 $aA_3=A_3a$ 成立，(任意 a 属于 S_3)，

上面的例子说明，
对于一个群 G 来说，并不是所有的子群都能满足我们希望具备的条件，
但是，我们希望子群具备这个条件，而且也确实有子群满足这样的条件，

定义 3.3 设 H 是群 G 的子群，若对属于群 G 的任意 a 都有 aH=Ha，
则称 H 是 G 的正规子群，记为 $H\lhd G$，

交换群的任意子群都是正规子群，另外，{e}，G 和 C(G)都是群 G 的正规子群，

定理 3.2 令 H 是群 G 的正规子群，
若$\Sigma_H=\{aH|a\in G\}$，则Σ_H关于集合的乘法运算是群，
我们称Σ_H这个群为 G 的关于 H 的商群，并记为 G/H，
证: 由于对属于Σ_H的任意 aH，bH，cH，
总存在有(aH)(bH)=aHbH=abHH=abH 属于Σ_H
和((aH)(bH))(cH)=(abH)(cH)=abcH=(aH)(bcH)=(aH)((bH)(cH))，
所以集合的乘法运算是Σ_H上的一个运算，且这个运算满足结合律，
又由于有 H(aH)=(eH)(aH)=eaH=aH 和$(a^{-1}H)(aH)=eH=H$，
所以 H 是Σ_H的单位元，$a^{-1}H$ 是 aH 的逆元，
这就是说Σ_H关于集合的乘法运算是群，

若将商群中的元素 gH 简记为$\overline{g}$，
则有 $G/H=\{\overline{g}|g\in H\}$，且$\overline{g}_1\overline{g}_2=\overline{g_1g_2}$，$\overline{e}=H$，$(\overline{g})^{-1}=\overline{g^{-1}}$，
若 G 是有限群，则由定理 3.1 可知，G/H 的阶(左陪集的个数)是 G 的阶的因数

例 3.5 $H=\{\bar{0}, \bar{3}\}$是群$\{Z_6; +\}$的正规子群，试求商群 Z_6/H 中的所有元素，

解: 因为 H 在 Z_6 中的左陪集有三个: $\bar{0}+H$，$\bar{1}+H$ 和$\bar{2}+H$，

所以 $Z_6/H=\{\bar{0}+H, \bar{1}+H, \bar{2}+H\}=\{\bar{\bar{0}}, \bar{\bar{1}}, \bar{\bar{2}}\}$，

例 3.6 交错群 A_3 是对称群 S_3 的正规子群，试求商群 S_3/A_3 中所有元素

解: 因为$\frac{|S_3|}{|A_3|}=2$，所以 A_3 在 S_3 中的左陪集有两个: A_3 和$(12)A_3$，

从而，$S_3/A_3=\{A_3$ 和$(12)A_3\}$

定理 3.3 若 H 是群 G 的正规子群，则

(1)G 的包含 H 的子群与 G/H 的子群一一对应，

特别地，G/H 的任意一个子群形如 K/H，其中 K 是 G 的包含 H 的子群；

(2)G 的包含 H 的正规子群与 G/H 的正规子群一一对应，，

证(1): 令 G 的包含 H 的子群构成的集合为 A，G/H 的子群构成的集合为 B，

若 K 属于 A，则 H 是 K 的正规子群，且商群 K/H 是 G/H 的子群，

定义映射φ: $A\to B$，$K\to K/H$，则可证明φ是双射，

因为若 $K_1/H=K_2/H$，则对属于 K_1 的任意 k_1，存在属于 K_2 的 k_2，使得 $k_1H=k_2H$，

从而存在属于 H 的 h，使得 $k_1=k_2h$ 属于 K_2

因此，K_1 包含于 K_2, 同样地，我们有 K_2 包含于 K_1，

所以 $K_1=K_2$，这说明φ是单射

若$\overline{K}$是 G/H 的子群，则等于$\{k\in G|kH\in\overline{K}\}$的 K 是 G 的包含 H 的子群，且$\varphi(K)=\overline{K}$

这说明φ是满射，因而φ是双射，

由此也得到，G/H 的任意一个子群形如 K/H，其中 K 是 G 的包含 H 的子群，

下面我们给出正规子群的一些判别方法，

根据本章例 2.5，我们容易知道:

若 H 是群的子群，则 H 是 G 的正规子群的充分必要条件是 $N_G(H)=G$，

定理 3.4 设 H 是群 G 的子群，则下列条件等价:

(1)H 是 G 的正规子群

(2)对属于群 G 的任意 g，都有的 gHg^{-1} 等于 H

(3)对属于群 G 的任意 g，都有 gHg^{-1} 包含于 H

(4)对属于群 H 的任意 h，属于群 G 的任意 g，都有 ghg^{-1} 属于 H

例 3.7 试证明特殊线性群 $SL_n(R)$是一般线性群 $CL_n(R)$的正规子群，

证: 我们已经知道，$SL_n(R)$是 $CL_n(R)$的子群，

另外，对属于 $SL_n(R)$的任意 A，和对属于 $CL_n(R)$的任意 B 都有

$\det(BAB^{-1})=\det(A)=1$，所以 BAB^{-1} 属于 $SL_n(R)$，

由定理 3.4 可知 $SL_n(R)$是 $CL_n(R)$的正规子群，

例 3.8 证明指数为 2 的子群是正规子群，

证: 若 H 是群 G 的指数为 2 的子群，则左右陪集各有两个，

对属于群 G 的任意 a，

若 a 属于 H，则 aH=Ha=H；

若 a 不属于 H，则有左陪集集合$\Sigma_H=\{H,aH\}$和右陪集集合Σ'_H等于$\{H,Ha\}$，

因为Σ_H和Σ'_H都是群 G 的一个分类，因此 aH=Ha，

所以，根据定义 3.3 可知，H 是 G 的正规子群，

因为$|S_n:A_n|=\frac{|S_n|}{|A_n|}==2$，因此，交错群 A_n 是对称群 S_n 的正规子群，

例 3.9 若 H 是群 G 的 n 阶子群，且 G 的阶为 n 的子群只有一个，

试证明 H 是群 G 的正规子群，

证: 易知，对属于群 G 的任意 g，有 gHg^{-1} 是 G 的阶为 n 的子群，

从而 $gHg^{-1}=H$，gH=Hg，所以，H 是 G 的正规子群，

若称 gHg^{-1} 为 H 的共轭子群，则 H 是 G 的正规子群的充分必要条件是

H 的共轭子群只有一个，就是 H 本身，

最后，我们简单介绍一下后文将用到的交错群 A_n 的单群性质，

定义 3.4 设 G 是群，若$|G|>1$ 且 G 的正规子群仅有 G 和$\{e\}$，则称 G 是单群，
显然，任意素数阶群都是单群，
例如交错群 A_3(3 阶群)和剩余类加法群 Z_p(p 是素数)都是单群，
而且 A_3 和 Z_p 还是交换单群，

下面我们将证明交错群 $A_n(n\geqslant 5)$也是单群，

引理 3.1 设等于$(i_1i_2\cdots i_t)$的σ是对称群 S_n 中的一个轮换，
则对属于群 S_n 的任意τ，有$\tau\sigma\tau^{-1}=(\tau(i_1)\tau(i_2)\cdots\tau(i_t))$，
证: 显然，$\tau\sigma\tau^{-1}(\tau(i_t))=\tau\sigma(i_t)=\tau(i_1)$，
若 $1\leqslant j<t$，则有$\tau\sigma\tau^{-1}(\tau(i_j))=\tau\sigma(i_j)=\tau(i_{j+1})$，
若 k 属于$\{1,2,\cdots,n\}-\{\tau(i_1),\tau(i_2),\cdots,\tau(i_t)\}$，即 $k\neq\tau(i_j)$，$1\leqslant j<t$，
那么$\tau^{-1}(k)$不属于$\{i_1i_2\cdots i_t\}$，
因而$\sigma(\tau^{-1}(k))=\tau^{-1}(k)$，$\tau\sigma(\tau^{-1}(k))=k$，结论得证，

定理 3.5 若 $n\geqslant 5$，则交错群 A_n 是单群，

证: 设 H 是 A_n 的正规子群，且 H 不等于{(1)}，下面我们证明 H 等于 A_n

因为任意偶置换可以写成 3 轮换(长度为 3 的轮换)的乘积，

因此我们仅需要证明 H 包含所有的 3 轮换

对属于 S_n 的任意σ，如果σ(i)等于 i，则称 i 是σ的不动点，

下面我们用 d(σ)表示σ的不动点的个数，

若不等于(1)的σ是 H 中有不动点个数最多的元素(这样的元素是存在的)，

则可证明σ是 3 轮换，即 d(σ)等于 n−3，

事实上，若 d(σ)不等于 n−3，则 d(σ)小于 n−3

(显然，d(σ)不会等于 n 和 n−1，

又因为属于 H 的σ是偶置换，因此，d(σ)不等于 n−2)

将σ表示成不相交的轮换的乘积，并将最长的轮换写在最左边，

不妨设σ=(123⋯)⋯(最长轮换的长度大于等于 3)

或σ=(12)(34)⋯(最长轮换的长度为 2)

并取属于 A_n 的τ等于(345)，

因为 H 是 A_n 的正规子群，因此有 $t\sigma\tau^{-1}$ 属于 H，进而有$\sigma^{-1}\tau\sigma\tau^{-1}$ 属于 H，

令$\sigma^{-1}\tau\sigma\tau^{-1}$ 等于δ，

若 d(σ)等于 n−4，则σ等于(12)(34)(等于(1234)的σ不是偶置换)，

从而$\delta=\sigma^{-1}\tau\sigma\tau^{-1}$

=(34)(12)(345)(12)(34)(354)

=(34)(12)(34)(45)(12)(34)(34)(35)

=(45)(35)

=(453)

=τ，

即 d(δ)等于 n−3，这与σ的取法矛盾，

若 d(σ)小于 n−4，即至少有 5 个元素在σ的作用下发生变化，

若σ(i)=i，则 i 大于 5，从而，τ(i)=i，

因此δ(i)=i，即在σ作用下不动的元素在δ作用下也不动，

然而$\delta(1)=\sigma^{-1}\tau\sigma\tau^{-1}(1)=\sigma^{-1}\tau\sigma(1)=\sigma^{-1}\tau(2)=\sigma^{-1}(2)=1$，

所以 $d(\delta)$大于 $d(\sigma)$，但这与σ的取法矛盾，

因此假设不成立，所以只能有 $d(\sigma)=n-3$，

下面证明 H 包含 A_n 中所有的 3 轮换，

不妨设上述属于 H 的σ等于(123)，

对属于 A 的任意(ijk)，在 A_n 中取元素$\omega = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots & n \\ i & j & k & t_4 & t_5 & \cdots & t_n \end{pmatrix}$

(注意，若ω不是偶置换，则可以取$\omega'=(t_4t_5)\omega$，)

则由引理 3，1 有$\omega\sigma\omega'=(\omega(1)\omega(2)\omega(3))=(ijk)$，

又因 H 是 A_n 的正规子群，所以(ijk)属于 H，