

1. 设 H 是群 G 的子群, $\Sigma = \{gH | g \in G\}$,

试证明映射 $\varphi: G \times \Sigma \rightarrow \Sigma, (g_1, gH) \rightarrow (g_1g)H$ 是群 G 在左陪集构成的集合 Σ 上的作用

证明: 对属于群 G 的任意 g_1, g_2, g_3 , 若 $g_2H = g_3H$, 则 $g_1g_2H = g_1g_3H$, 即 φ 是映射,
又因为 $(g_1g_2)(gH) = g_1(g_2(gH))$, $e(gH) = (eg)H = gH$, 所以 φ 使得 Σ 成为一个 G -集,

2. 设 G 是有限群, 集合 S 是 G -集,

若对属于 S 的任意 s, t , 都有属于 G 的 g , 使得 $gs = t$, 试证明 $|G| = |S||G_s|$,

证明: 对属于 S 的任意 t , 都有属于 G 的 g , 使得 $t = gs$,

所以 t 属于 $Gs = \{gs | g \in G\}$, $S = Gs$, $|S| = |Gs| = |G: G_s|$

所以 $|G| = |G: G_s||G_s| = |S||G_s|$,

3. 设 H 是有限群 G 的子群, 对属于 G 的任意 g ,

试证明 H 的共轭子群 $gHg^{-1} = \{ghg^{-1} | h \in H\}$ 与 H 的阶数相同

证明: 令 $\varphi: H \rightarrow gHg^{-1}, \varphi(h) = ghg^{-1}$, 因为 φ 是一个双射, 故 $|gHg^{-1}| = |H|$,

4. 证明子群间的共轭关系是等价关系

证明: (1)反身性: 对 G 的任意子群 H , 有 $H = eHe^{-1}$, 即反身性成立;

(2)对称性: 若子群 H 与 N 共轭, 即存在属于 G 的 x , 使得 $xHx^{-1} = N$,

又因 $H = (x^{-1})N(x^{-1})^{-1}$, 即 N 与 H 共轭;

(3)传递性: 若子群 H 与 N 共轭, N 与 M 共轭,

则存在属于 G 的 x, y , 使得 $xHx^{-1} = N, yNy^{-1} = M$,

从而 $M = yxH(yx)^{-1}$, 即 H 与 M 共轭,

因此, 共轭关系是一个等价关系

5. 设 G 是群, G 的子群的集合为 $S=\{H|H \text{ 是 } G \text{ 的子群}\}$, 试证明:

(1) 映射 $\varphi: G \times S \rightarrow S, (g, H) \rightarrow gHg^{-1}$ 是群 G 在集合 S 上的一个作用;

(2) 对属于 S 的 H , H 的稳定子群是 H 在 G 中的正规化子, 即 $G_H = N_G(H)$;

(3) 对属于 S 的 H , 轨道 $GH = \{H\} \Leftrightarrow H$ 是 G 的正规子群,

证明: (1) 根据群在集合上作用的定义可得证,

(2) 对属于 S 的任意 H , $G_H = \{g \in G | g(H) = H\} = \{g \in G | gHg^{-1} = H\} = N_G(H)$,

(3) 对属于 S 的任意 H , $GH = \{g(H) | g \in G\} = \{gHg^{-1} | g \in G\}$,

H 是 G 的正规子群的充要条件是与 H 共轭的子群只有本身, 即 $GH = |H|$,

6. 确定交错群 A_4 中的所有共轭类,

解: A_4 的共轭类为

$\{(1)\}$,

$\{(12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$,

$\{(123), (142), (134), (243)\}$,

$\{(132), (124), (143), (234)\}$,

7. 试证明阶数为 p^2 (p 为素数) 的群是交换群,

证明: 设 $|G| = p^2$, 则 G 的中心是 p -群, 若 $|C(G)| = p$, 则 $G/C(G)$ 为 p 阶循环群,

从而 G 为交换群,

若 $|C(G)| = p^2$, 则 $C(G) = G$, 从而 G 为交换群,

8. 试证明在同构意义下, p^2 阶群仅有两类,

证明: 设群 G 的阶为 p^2 , 若 G 中存在阶为 p^2 的元素, 则 G 是循环群, $G \cong Z_{p^2}$

否则 G 中存在阶为 p 的元素 a, b , 使得 $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = 0$,

由上题知 G 是交换群, 因此 $G = \langle a \rangle \oplus \langle b \rangle$, 从而 $G \cong Z_p \times Z_p$

习题 1 设 G 是群，关系 $a \sim b \Leftrightarrow$ 存在属于 G 的 g 使得 $a = gbg^{-1}$ ，称为共轭关系，试证明共轭关系是等价关系

证明： 因为 $a = eae^{-1}$ ，所以 $a \sim a$;

若存在属于 G 的 g 使得 $a = gbg^{-1}$ ，即 $a \sim b$ ，则 $b = g^{-1}ag$ ，即 $b \sim a$;

若存在属于 G 的 g 和 h ，使得 $a = gbg^{-1}$ ， $b = hch^{-1}$ ，即 $a \sim b$ ， $b \sim c$ ，

则 $a = (gh)c(gh)^{-1}$ ，即 $a \sim c$ ，

综上，共轭关系是等价关系，

习题 2 分别确定群 S_3, A_3 中所有共轭类，

解： 群的元素在群的共轭作用下的轨道就是该元素所在的共轭类，

共轭类构成的集合是群的分类，

左陪集是群的一个分类，且每个左陪集含有的元素个数均相等，

尽管共轭类也是群的一个分类，但是每个共轭类所含元素的个数不一定相等，

但是，每个共轭类所含元素的个数一定是群的阶数的因数，

若 a 是中心元素，则与 a 共轭的元素只有 a ，

因此，中心元素所在的共轭类仅含有一个元素，就是它本身

S_3 的中心元素只有 (1) ，因此 $S_3(1) = \{(1)\}$ ，

计算可知 $S_3(12) = \{(12), (23), (13)\}$ ，

由共轭类集合是群的分类及 (123) 不是中心元素可得 $S_3(123) = \{(123), (132)\}$ ，

综上， S_3 的所有共轭类为 $S_3(1), S_3(12), S_3(123)$ ，

A_3 是交换群，所有元素在中心中，

因此， A_3 的共轭类有 $A_3(1), A_3(123), A_3(132)$ ，

习题 3 证明在群 G 的共轭作用之下，若 $b = gag^{-1}$ ，则 $G_b = gG_ag^{-1}$ ，

证明： 若 x 属于 G_b ，则 $xb = bx$ ，代入 $b = gag^{-1}$ 得 $xgag^{-1} = gag^{-1}x$ ，

从而 $g^{-1}xga = ag^{-1}xg$ ，即 $g^{-1}xg$ 属于 G_a ， x 属于 gG_ag^{-1} ，

这说明 G_b 包含于 gG_ag^{-1} ，

同理可证 gG_ag^{-1} 包含于 G_b ，

习题 4 在 S_3 中，求与子群 $H=\langle(12)\rangle$ 共轭的所有子群，

解: 注: 若 H 是 G 的子群，则 H 是正规子群 $\Leftrightarrow$ 与 H 共轭的子群只有 H 本身，

例如，在 S_3 中，与 A_3 共轭的子群只有 A_3 ，

$H=\langle(12)\rangle$ 是 2 阶子群，与它共轭的子群也一定是 2 阶子群，

所以 H 的共轭子群有 $H, (13)H(13)^{-1}=\langle(23)\rangle, (23)H(23)^{-1}=\langle(13)\rangle,$

习题 5 设 $GL_n(R)$ 是实数域上的一般线性群，

试证明 $A(v)=Av$ ，是 $GL_n(R)$ 在 R^n (实数域上的 n 维向量空间) 上的作用，

其中 A 属于 $GL_n(R)$ ， v 属于 R^n

证明: 设 E 是单位矩阵， A, B 是可逆矩阵，

根据矩阵运算的性质知 $E(v)=v, AB(v)=A(B(v))$ ，从而 R^n 是 $CL_n(R)$ -集

习题 6 设 H 是 G 的子群，证明 $h(g)=hg$ 是 H 在 G 上的作用，

其中 h 属于 H, g 属于 G ，并求这个作用下的轨道，

证明: 因为 $e(g)=g, h_1 h_2(g)=h_1 h_2 g=h_1(h_2(g))$ ，

所以 $h(g)=hg$ 是 H 在 G 上的作用，

且 g 在这个作用下的轨道为 $Hg=\{hg|h\in H\}$ ，这是 G 关于子群 H 的一个右陪集，

若 H 是有限群，则 $|H|=|Hg|=|H:H_g|$ ，即稳定子群为 $H_g=\{e\}$ ，

习题 7 设 S 是 G -集，若对属于 S 的任意 s, t ，都有属于 G 的 g ，使得 $gs=t$ ，

则称 S 是可迁 G -集，试证明若 S 是可迁 G -集，则轨道只有一个，

证明: 由 $Gs=\{xs|x\in G\}=\{xg^{-1}t|x\in G\}$ 包含于 $Gt=\{xt|x\in G\}=\{xgs|x\in G\}$ 包含于 Gs

故得证，

习题 8 设 H 是 G 的子群，试证明 G 中与 H 共轭的子群的个数为 $|G: N_G(H)|$ ，

证明: 令 $S = \{gHg^{-1} | g \in G\}$ ，

因为 $\varphi: G \times S \rightarrow S, (g, aHa^{-1}) \rightarrow gaHa^{-1}g^{-1}$ 是 G 在 S 上的作用，

对属于 S 的 aHa^{-1} 和 bHb^{-1} ，有 $aHa^{-1} = ab^{-1}(bHb^{-1})$ ，

即 S 是可迁 G -集，轨道只有一个，

令 $s = eHe^{-1} = H$ 属于 S ，则 $|S| = |Gs| = |G: G_s|$ ，

这个作用下的稳定子群为 $G_s = \{g \in G | s = g(s)\} = \{g \in G | H = gHg^{-1}\} = N_G(H)$ ，

所以 $|S| = |G: N_G(H)|$ ，

习题 9 设 H, K 是群 G 的两个 p -群， H 是 G 的正规子群，

试证明 HK 是 G 的 p -群，

证明: 因为 p -群的商群还是 p -群，所以 $K/(K \cap H)$ 是 p -群，

再由群的第一同构定理得 $HK/H \cong K/(K \cap H)$ 是 p -群，从而 HK 是 G 的 p -群，

习题 10 设 H 是群 G 的正规子群，

令 a 属于 H ， $\bar{a} = \{gag^{-1} | g \in G\}$ 表示 a 所在的共轭类，试证明 H 是某些共轭类的并，

若某些共轭类的并 H 成为 G 的子群，则这个子群为正规子群，

证明: 因为 a 属于 $\bar{a}$ ，所以第一个结论显然，

下证第二个结论，

对属于 H 的任意 h ，对属于群 G 的任意 g ，有 ghg^{-1} 属于 H ，

所以 H 是 G 的正规子群，

习题 11 求 A_4 的正规子群 ,

解: 直接计算可知 A_4 有 4 个共轭类:

$\{(1)\}$,

$\{(12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$,

$\{(123), (142), (134), (243)\}$,

$\{(132), (124), (143), (234)\}$,

又因为 A_4 的子群阶可能为 1, 2, 3, 4, 6, 12,

所以根据上题可知正规子群有 $\{(1)\}, K_4, A_4$

习题 12 S_4 是集合 $\{1, 2, 3, 4\}$ 上的对称群 , 因此 $\{1, 2, 3, 4\}$ 是 S_4 -集 ,

求 2 的轨道和稳定子群 ,

解: 令 $G=S_4, M=\{1, 2, 3, 4\}$, 则 $G_2=\{\sigma(2)|\sigma\in S_4\}$,

因为 S_4 是集合 M 上的所有双变换构成的 ,

因此 $\sigma(2)$ 可以取遍 M 的所有元素 , 即 2 的轨道为 $G_2=M$,

2 的稳定子群为 $G_2=\{\sigma\in S_4|\sigma(2)=2\}=\{(1), (13), (14), (34), (134), (143)\}$,

习题 13 将交错群 A_4 作用在集合 $\{1, 2, 3, 4\}$ 上 , 求 2 的轨道和稳定子群 ,

解: 令 $G=A_4, M=\{1, 2, 3, 4\}$, 则 2 的轨道为 $G_2=\{\sigma(2)|\sigma\in A_4\}$

因为 $\{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ 包含于 A_4 , 因此 $G_2=M$,

2 的稳定子群为 $G_2=\{\sigma\in A_4|\sigma(2)=2\}=\{(1), (134), (143)\}$,

习题 14 令 $H=\{(1), (123), (132)\}$ 是 S_4 的子群 , 将 H 作用在集合 $\{1, 2, 3, 4\}$ 上 ,

求 2 的轨道和稳定子群 ,

解: 令 $G=H, M=\{1, 2, 3, 4\}$, 则 2 的轨道为 $G_2=\{\sigma(2)|\sigma\in H\}=\{1, 2, 3\}$,

2 的稳定子群为 $G_2=\{\sigma\in H|\sigma(2)=2\}=\{(1)\}$,

习题 15 证明 p -群 G 的非正规子群的个数一定是 p 的倍数，

证明: 设 S 是 G 的非正规子群构成的集合，

定义映射 $\varphi: G \times S \rightarrow S, (g, H) \rightarrow gHg^{-1}$ ，则 S 是 G -集，从而 $|S| = \sum |G: G_H|$ ，

因为 H 不是正规子群，所以 $G_H \neq G$ ， $p \nmid |G: G_H|$ ，因此 $p \nmid |S|$ ，