研究群，除了研究其内部结构，还可以研究群在集合上的作用，
通过这种作用的效果，达到理解群的目的，

定义 7.1 令 G 是一个群，s 是一个非空集合，
若存在映射φ: $G\times S\to S$，$(g, s)\to g(s)$，并且该映射满足下列条件:
对属于群 G 的任意 g_1，g_2 和对属于 S 的任意 s，
总有$(g_1g_2)(s)=g_1(g_2(s))$，$e(s)=s$，其中 e 是 G 的单位元，
则称φ是群 G 在集合 S 上的作用，也称 S 是 G–集，
在不引起混淆的情况下，将 g(s)简记为 gs，

例 7.1 令 G 是群，映射φ: $G\times G\to G$，$(g, a)\to L$，$(a)=ga$ 是群 G 在其本身上的作用，
即左乘变换决定了群 G 在其本身上的一个作用，

命题 7.1 令 G 是群，集合 S 是 G–集，s 属于 S，
则 G 的子集 $G_s=\{g\in G|gs=s\}$是 G 的子群，称其为 s 的稳定子群，
证: 因 e 属于 G_s，
另外，对属于群 G_s 的任意 g_1，g_2，有$(g_1g_2^{-1})(s)=(g_1g_2^{-1})(g_2s)=g_1s=s$，
即 $g_1g_2^{-1}$属于 G_s，所以 G_s 是 G 的子群，

在群的作用下，我们可以按照轨道将集合的元素进行分类，

定义 7.2 令 G 是群，集合 S 是 G–集，

若 s 属于 S，则称 $Gs=\{gs|g\in G\}$(包含于 S)是 s(在群 G 作用下)的轨道，

并简记其为$\bar{s}$，

令集合 S 是 G–集，则轨道集合$\{\bar{s}|s\in S\}$具有如下性质:

(1)s 属于$\bar{s}$, $S=\bigcup_{s\in S}\bar{s}$

(2)s'属于$\bar{s}\Leftrightarrow\overline{s'}=s$(若称 s 是轨道$\bar{s}$的代表元，则轨道的代表元不唯一)；

(3)对于属于 S 的 s', s，有$\overline{s'}=s$ 或者$\overline{s'}\cap\bar{s}=\varnothing$，

由性质(1), (3)我们可知: 轨道构成的集合族$\{\bar{s}|s\in S\}$是集合 S 的一个分类，

下面我们利用稳定子群求轨道所含元素的个数，

定理 7.1 设 G 是有限群，有限集合 S 是 G–集，

若 s 属于 S，则轨道$\bar{s}$中元素的个数等于稳定子群 G_s 在 G 中的指数，

即$|\bar{s}|=|G:G_s|$，进而，$|\bar{s}|$是$|G|$的因数，

证: 对属于群 G 的任意 g_1, g_2，有 $g_1s=g_2s\Leftrightarrow g_1^{-1}g_2s=s\Leftrightarrow g_1^{-1}g_2\in G\Leftrightarrow g_1G_s=g_2G_s$

从而 $gG_s\to gs$ 给出了由 G_s 的所有左陪集集合至轨道集合$\bar{s}$之间的双射，

所以$|\bar{s}|=|G:G_s|$,

由拉格朗日定理知$|G:G_s|$是$|G|$的因数，因而$|\bar{s}|$是$|G|$的因数，

推论 7.1 设 G 是有限群，S 是有限集合，

若 S 是 G − 集, 则$|S|=\sum_{s\in I}|\bar{s}|=\sum_{s\in I}|G:G_s|$, 其中 I 为不相交轨道的代表元集合

我们称此推论中的$|S|=\sum_{s\in I}|\bar{s}|=\sum_{s\in I}|G:G_s|$, 为集合 S 的轨道分解方程

下面我们讨论从给定的群 G 本身得到的 G–集及相关性质，

定义 7.3 设 G 是群，对属于群 G 的任意 a , b ,
若存在属于 G 的 g 使得 $b=gag^{-1}$，则称 a 与 b(在 G 中)共轭，
对 G 的子群 A , B ,
若存在属于 G 的 g 使得 $B=gAg^{-1}$，则称 A 与 B(在 G 中)共轭，

例 7.2 设 G 是群，
则存在一个显然的群 G 在集合 G 上的作用 $G\times G\to G$, $(g , a)\to gag^{-1}$
称为群 G 的共轭作用，
此时，对属于 G 的 a , a 的稳定子群 $G_a=\{g\in G|ga=ag\}$
是与 a 可交换的元素构成的集合，
a 的轨道$\bar{a}=Ga=\{gag^{-1}|g\in G\}$是与 a 共轭的元素构成的集合，
我们又称其为群 G 的共轭类，
相应地,轨道分解方程$|G|=\sum_{a\in I}|\bar{a}|=\sum_{a\in I}|G:G_a|$又称为群 G 的类方程
其中的 I 表示不相交的共轭类代表元的集合，
显然，在群 G 的共轭作用之下，同一轨道中的元素彼此共轭，
同一轨道中元素的稳定子群彼此共轭，即若 $b=gag^{-1}$，则 $G_b=gG_ag^{-1}$，
注意，由于 a 属于 $C(G)\Leftrightarrow\bar{a}=\{a\}$，
所以群的类方程又可以表示成$|G|=|C(G)|+\sum_{a\in I-C(G)}|G:G_a|$

若$|G|=p^n$(p 是素数),由$|\bar{a}|=|G:G_a|$是$|G|$的因数可知，p 整除$\sum_{a\in I-C(G)}|G:G_a|$

从而 p 整除$|C(G)|$，
而对于群 G，显然有 e 属于 C(G)，因此当 $n\geqslant 1$ 时，我们有$|C(G)|>1$，

定义 7.4 若$|G|=p^n$(p 是素数，$n\geqslant 1$)，则称 G 是 p−群，

据拉格朗日定理可知，若 G 是 p−群，则 G 的任意一个非平凡子群仍为 p−群

特别地，G 的中心仍为 p−群，