1，设 $H=\{\overline{0}，\overline{6}，\overline{12}，\overline{18}\}$是剩余类加法群 Z_{24} 的子群，试证明 $Z_{24}/H\cong Z_6$，

证明: 因为 $G=Z_{24}$ 是交换群，所以 $H=\langle\overline{6}\rangle=\{\overline{0}，\overline{6}，\overline{12}，\overline{18}\}$是 G 的正规子群

定义映射φ: $G/H\rightarrow Z_6$ 使得$\varphi(\overline{a}+H)=\overline{a}$，显然$\varphi$是双射且

$\varphi((\overline{a}+H)+(\overline{b}+H))=\varphi((\overline{a}+\overline{b})+H)=\overline{a}+\overline{b}=\varphi(\overline{a}+H)+\varphi(\overline{b}+H)$，

从而φ是群 G/H 到 Z_6 的同构，

2，证明任意 2 阶群与乘法群{1，−1}同构，

证明: 设 G={a，e}为 2 阶群，其中 $a^2=e$，

令映射φ: $G\rightarrow\{1,-1\}$满足 $e\rightarrow1$，$a\rightarrow-1$，显然φ是双射，

并且$\varphi(ee)=\varphi(e)=1=\varphi(e)\varphi(e)$，$\varphi(ea)=\varphi(a)=-1=\varphi(e)\varphi(a)$，

$\varphi(ae)=\varphi(a)=-1=\varphi(a)\varphi(e)$，$\varphi(aa)=\varphi(e)=1=\varphi(a)\varphi(a)$，

故任意 2 阶群与乘法群{1，−1}同构，

3，证明剩余类加法群 Z_3 同构于交错群 A_3，

证明: 二者都是交换群，

令映射φ: $Z_3\rightarrow A_3$，满足$\overline{0}\rightarrow(1)$，$\overline{1}\rightarrow(123)$，$\overline{2}\rightarrow(132)$，易知$\varphi$是双射且

$\varphi(\overline{0}+\overline{0})=(1)=\varphi(\overline{0})\varphi(\overline{0})$，$\varphi(\overline{0}+\overline{1})=(123)=\varphi(\overline{0})\varphi(\overline{1})$，

$\varphi(\overline{2}+\overline{1})=(1)=\varphi(\overline{1})\varphi(\overline{2})$，$\varphi(\overline{0}+\overline{2})=(132)=\varphi(\overline{0})\varphi(\overline{2})$，

$\varphi(\overline{1}+\overline{1})=(132)=\varphi(\overline{1})\varphi(\overline{1})$，$\varphi(\overline{2}+\overline{2})=(123)=\varphi(\overline{2})\varphi(\overline{2})$，

故φ是 Z_3 到 A_3 的同构映射，

4，说明整数加法群不能与有理数加法群同构，

证明 1: 假设存在 Q 到 Z 的同构映射φ，则必有属于 Q 的 r，使得$\varphi(r)=1$，

设$\varphi\left(\frac{r}{2}\right)=a$ 属于 Z，则 $2a=2\varphi\left(\frac{r}{2}\right)=\varphi(r)=1$，所以 $a=\frac{1}{2}$，这与 a 是整数矛盾，

所以整数加法群不能与有理数加法群同构，

证明 2: 假设存在$\varphi: Z\to Q$ 的同构映射，

则对属于 Z 的任意 m，有$\varphi(m)=m\varphi(1)$，$\varphi(1)\neq 0$，

若$\varphi(a)=\frac{\varphi(1)}{2}$，则 $a\varphi(1)=\varphi(a)=\frac{\varphi(1)}{2}$，$a=\frac{1}{2}$，矛盾，

故整数加法群与有理数加法群不同构，

5，说明群$\{Q^*;\bullet\}$与$\{Q;+\}$不同构，其中 $Q^*=Q-\{0\}$，

证明: 反证，若φ是$\{Q;+\}$到$\{Q^*;\bullet\}$的同构映射，则$\varphi(a)=\varphi\left(\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\right)=\varphi\left(\frac{a}{2}\right)^2\geqslant 0$，

也就是说负数无原像，与同构矛盾，所以$\{Q;+\}$与$\{Q^*;\bullet\}$不同构，

6，设φ是群 G 到 G'的同态，试证明

(1)若φ是满同态，H 是 G 的正规子群，则$\varphi(H)$是 G'的正规子群；

(2)若 H'是 G'的正规子群，则$\varphi^{-1}(H')$是 G 的正规子群，

证明:

(1)由[第二章命题 4.1]知，$\varphi(H)$是 G'的子群，由于φ是满同态，

从而对属于 G'的任意 g'，存在属于 G 的 g，使得 $g'=\varphi(g)$，

对属于 H 的任意 h，

有 $g'\varphi(h)(g')^{-1}=\varphi(g)\varphi(h)(\varphi(g))^{-1}=\varphi(g)\varphi(h)\varphi(g^{-1})=\varphi(ghg^{-1})$，

又因 $H\triangleleft G$，从而 ghg^{-1} 属于 H，因此 $g'\varphi(h)(g')^{-1}=\varphi(ghg^{-1})$属于$\varphi(H)$，

故$\varphi(H)\triangleleft G'$，

(2)由[第二章命题 4.1]可知$\varphi^{-1}(H')$是 G 的子群，

且对属于 G 的任意 g 和对属于$\varphi^{-1}(H')$的任意 h，

有$\varphi(h)$属于 H'，$\varphi(ghg^{-1})=\varphi(g)\varphi(h)(\varphi(g))^{-1}$，

再根据 H'是 G'的正规子群，得$\varphi(ghg^{-1})$属于 H'，即 ghg^{-1} 属于$\varphi^{-1}(H')$，

故$\varphi^{-1}(H')$是 G 的正规子群，

7，试证明单群的同态像是单群或是1阶群，

证明1: 设G为单群，且$G \overset{\varphi}{\cong} \overline{G}$，

若$\overline{G}$不是1阶群，令$\overline{H} \lhd \overline{G}$，则$\varphi^{-1}(\overline{H})=H \lhd G$，

于是当$H=\{e\}$时，$\overline{H}=\{\overline{e}\}$；当$H=G$时，$\overline{H}=\overline{G}$，即$\overline{G}$是单群，

证明2: 设G为单群，φ为群G到群G'的同态，则$Ker\ \varphi=\{0\}$或$Ker\ \varphi=G$，

若$Ker\ \varphi=\{0\}$，则$G\cong Im\ \varphi$，从而$Im\ \varphi$为单群，

若$Ker\ \varphi=G$，则$G/Ker\ \varphi=\{e\}=Im\ \varphi$，此时$Im\ \varphi$为1阶群，

故单群的同态像是单群或是1阶群，

8，试证明Aut(G)关于变换的乘法运算是群，

$Int(G)=\{ad_g, |g\in G\}$是Aut(G)的正规子群，

(一般地，我们称Aut(G)是群G的自同构群，Int(G)是群G的内自同构群，

而将Aut(G)/lnt(G)称为群G的外自同构群，)

证明: 显然，id_G属于Aut(G)，且对属于Aut(G)的任意φ，τ，有φτ属于Aut(G)，

另外，对属于Aut(G)的任意τ，和对属于G的任意g_1，g_2，

总存在属于G的g_1'，g_2'，使得$g_1=\tau(g_1')$，$g_2=\tau(g_2')$，

从而$\tau^{-1}(g_1g_2)=\tau^{-1}(\tau(g_1')\tau(g_2'))=\tau^{-1}(\tau(g_1'g_2'))=g_1'g_2'=\tau^{-1}(g_1)\tau^{-1}(g_2)$，

即τ^{-1}属于Aut(G)，所以Aut(G)是群，

对属于Aut(G)任意σ，属于Int(G)任意ad_g，和属于G任意g'，

总有$\sigma(ad_g)\sigma^{-1}(g')=\sigma(g\sigma^{-1}(g')g^{-1})=\sigma(g)g'\sigma(g)^{-1}=ad_{\sigma(g)}(g')$，

即$\sigma(ad_g)\sigma^{-1}=ad_{\sigma(g)}$属于Int(G)

所以$Int(G)=\{ad_g\ |g\in G\}$是Aut(G)的正规子群，

9，设G是群，说明左乘变换群L(G)不是自同构群Aut(G)的子群，

证明: L_g属于L(G)，$L_g(ab)=g(ab)\neq L_g(a)L_g(b)$，

所以L_g不属于Aut(G)(不同态)

10，设 G 是群，C(G)是 G 的中心，试证明 $G/C(G)\cong Int(G)$，

证明: 定义映射 $\varphi: G\to Int(G)$，$g\to ad_g$，

显然 φ 是满射，且对属于 G 的任意 g_1，g_2，

总有 $\varphi(g_1g_2)=ad_{g_1g_2}=ad_{g_1}ad_{g_2}=\varphi(g_1)\varphi(g_2)$，

由群同态基本定理知: $G/Ker\ \varphi\cong Int(G)$，

而 $Ker\ \varphi=\{g\in G|ad_g=ad_e\}=\{g\in G|gg'=g'g, g'\in G\}=C(G)$，

所以 $G/C(G)\cong Int(G)$，

11，试给出两个群 H 和 K，

使得 H 同构于 K 的一个真子群且 K 同构于 H 的一个真子群，

解: 设 $H=\{Z;+\}$，$K=\{2Z;+\}$，$J=\{4Z;+\}$，则 K 为 H 的真子群，J 为 K 的真子群，

对属于 H 的任意 x，知 $\varphi: x\to 4x$，为 H 到 K 的真子群 J 的同构映射，

而对属于 K 的任意 x，知 $\psi: x\to x$，为 K 到 H 的真子群 K 的同构映射，

习题 1 设 φ 是 G 到 G'的同态映射，τ 是 G'到 G''的同态映射，

试证明 $\tau\varphi$ 是 G 到 G''的同态映射，

证明: 对属于 G 的任意 g_1，g_2，总有 $\tau\varphi(g_1g_2)=\tau(\varphi(g_1)\varphi(g_2))=\tau\varphi(g_1)\tau\varphi(g_2)$，

所以 $\tau\varphi$ 是 G 到 G''的同态映射，

习题 2 证明群之间的关系: $G\sim G'\Leftrightarrow G\cong G'$ 是等价关系，

证明: 易知恒等映射是 G 到 G 的同构映射，即关系满足反身性，

若 φ 是 G 到 G'的同构映射，则 φ^{-1} 是 G'到 G 的双射，

对属于 G'的任意 a'，b'，存在属于 G 的 a，b，使得 $\varphi(a)=a'$，$\varphi(b)=b'$，$\varphi(ab)=a'b'$，

则 $\varphi^{-1}(a'b')=ab=\varphi^{-1}(a')\varphi^{-1}(b')$，所以 φ^{-1} 是 G'到 G 的同构映射，

即关系满足对称性，

若 φ 是 G 到 G'的同构映射，τ 是 G'到 G''的同构映射，

则由双射的合成仍然是双射及习题 1 可得 $\tau\varphi$ 是 G 到 G''的同构映射，

即关系满足传递性，

综上，关系 $G\sim G'\Leftrightarrow G\cong G$ 是等价关系

习题 3 设 G 是群，试证明按照映射的合成运算 End(G)是半群，Aut(G)是群

证明: 因为映射的合成运算满足结合律

且对属于 End(G)的任意φ，τ，和属于 G 的 g_1，g_2，

总有$\varphi\tau(g_1, g_2,)=\varphi(\tau(g_1)\tau(g_2))=\varphi(\tau(g_1))\varphi(\tau(g_2))=\varphi\tau(g_1)\varphi\tau(g_2)$，

即同态映射的合成还是同态映射，因此 End(G)是半群，

对属于 Aut(G)的任意φ，τ，有$\varphi\tau$属于 Aut(G)，

又因为 id_G 属于 Aut(G)，所以 Aut(G)是有单位元的半群，

对属于 G 的任意 g_1，g_2，存在有属于 G 的g_1'，g_2'，使得 $g_1=\tau(g_1')$，$g_2=\tau(g_2')$，

从而有$\tau^{-1}(g_1, g_2,)=\tau^{-1}(\tau(g_1')\tau(g_2'))=\tau^{-1}(\tau(g_1'g_2'))=g_1'g_2'=\tau^{-1}(g_1)\tau^{-1}(g_2)$，

即τ^{-1}属于 Aut(G)，所以 Aut(G)是群，

习题 4 设 G 是群，映射φ: G→G，使得$\varphi(a)=a^{-1}$，

试证明当且仅当 G 是交换群时φ是 G 的自同构映射，

证明: 因φ是双射，

因此，φ是 G 的自同构映射$\Leftrightarrow\varphi(ab)=\varphi(a)\varphi(b)$

$\Leftrightarrow(ab)^{-1}=a^{-1}b^{-1}\Leftrightarrow ab=ba\Leftrightarrow$G 是交换群，

其中任意 a，b 属于 G

习题 5 设φ是 G 到 G'的满同态映射，H'是 G'的正规子群，$H=\{g\in G|\varphi(g)\in H'\}$，

试证明 H 是 G 的正规子群，且 $G/H\cong G'/H'$，

证明: H 是 G 的正规子群的证明参见[习题 2.4 题 6]，

下面用群同态基本定理证明 $G/H\cong G'/H'$，

易知$\tau: G\to G'/H'$，$g\to\varphi(g)H'$是满同态$\varphi: G\to G'$和$\pi: G'\to G'/H'$的合成，

因而τ是满同态，

τ的核为 $\mathrm{Ker}\,\tau=\{g\in G|\varphi(g)\in H'\}=H$，由群同态基本定理可知 $G/H\cong G'/H'$，

习题 6 证明整数加法群与它的任意一个非平凡子群同构，

证明: 群的同构的证明关键是构造群 G 到 G' 的元素间对应关系 φ，并证明

(1) φ 是映射: 若 $a=b$，则 $\varphi(a)=\varphi(b)$；

(2) φ 是单射: 若 $\varphi(a)=\varphi(b)$，则 $a=b$；

(3) φ 是满射: 对属于 G' 的任意 b，总存在有属于 G 的 a，使得 $b=\varphi(a)$；

(4) φ 保持运算: 对属于 G 的任意 a,b，有 $\varphi(ab)=\varphi(a)\varphi(b)$，

设整数加法群的非平凡子群为 $\langle m\rangle$(m 属于 Z^+)，

定义映射 $\varphi: Z\to\langle m\rangle$，使得 $\varphi(a)=ma$，

若 $\varphi(a)=\varphi(b)$，则 $ma=mb$，从而 $a=b$，φ 是单射，

对属于 $\langle m\rangle$ 的任意 ma，有 $\varphi(a)=ma$，即 φ 是满射，

对属于 Z 的任意 a,b，有 $\varphi(a+b)=m(a+b)=ma+mb=\varphi(a)+\varphi(b)$，

综上，$Z\cong\langle m\rangle$，

习题 7 已知 $\{R;+\}$ 是实数集关于数的加法运算构成的群，

$\{R^+;\bullet\}$ 是正实数集关于数的乘法运算构成的群，证明 $R\cong R^+$，

证明: 易知 $\varphi: R\to R^+, a\to 10^a$ 是映射，若 $10^a=10^b$，则 $a=b$，即 φ 是单射，

对属于 R^+ 的任意 b，存在有属于 R 的 $\lg b$，使得 $\varphi(\lg b)=b$，即 φ 是满射，

对属于 R 的任意 a,b，有 $\varphi(a+b)=10^{a+b}=10^a10^b=\varphi(a)\varphi(b)$，

综上，$R\cong R^+$，

习题 8 试证明 $GL_n(R)/SL_n(R)\cong R^*$，

证明: 定义映射 $\varphi: GL_n(R)\to R^*, A\to \det(A)$，显然这是满射，

又因为 $\varphi(AB)=\det(AB)=\det(A)\det(B)=\varphi(A)\varphi(B)$，所以 φ 是满同态，

根据群同态基本定理可得 $GL_n(R)/\mathrm{Ker}\,\varphi\cong R^*$，而 $\mathrm{Ker}\,\varphi=\{A\in GL_n(R)|\det(A)=1\}$，

所以 $GL_n(R)/SL_n(R)\cong R^*$，

习题 9 已知非零实数集 R^*关于数的乘法运算构成群，

令 $r_a: x\to xa$，其中任意 x 属于 R^*，a 属于 R^*，试证明 r_a 是 R^*的变换；

若设所有这样的变换构成的集合为 r_{R^*}，

试证明 r_{R^*}关于变换的乘法运算是群且与 R^*同构，

证明: 因为非零元素的乘积是非零元素，

所以 r_a 是 R^*的变换，r_1 是 R^*的恒等变换，

又因为 $r_br_a=r_{ab}=r_ar_b$，$r_1r_a=r_a$，$r_{a^{-1}}r_a=r_1$，

所以 r_{R^*}关于变换的乘法运算是交换群，

定义映射φ: $R^*\to r_{R^*}$，使得$\varphi(a)=r_a$

因为$\varphi(ab)=r_{ab}=r_ar_b=\varphi(a)\varphi(b)$及$\varphi$是双射，可知 r_{R^*}与 R^*同构

习题 10 试证明 S_4 的子群 $H=\{(1),(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}$

与 4 次单位根群 $G=\{1,-1,i,-i\}$不同构，

证明: 若两个群同构，则它们有相同的代数性质，

若 G 与 H 同构，则它们之间的同构映射保持元素的阶不变，

G 有 4 阶元素 i，则 H 也应该有 4 阶元素，但是 H 的元素阶只有 1 和 2 两种情况，

所以二者不同构，

习题 11 已知$\{R;+\}$是实数集关于数的加法运算构成的群，

$\{R^*;\bullet\}$是非零实数集关于数的乘法运算构成的群，

试证明$\{R;+\}$与$\{R^*;\bullet\}$不同构，

证明: 假设存在$\{R^*;\bullet\}$到$\{R;+\}$的同构映射φ，则$\varphi(1)=0$，

设$\varphi(-1)=a$，显然 a 不等于 0，于是$\varphi(1)=\varphi(-1)+\varphi(-1)=2a$，

因此 a=0，矛盾，

习题 12 设 G_1 和 G_2 分别为 n_1, n_2 阶循环群，

试证明当且仅当 $n_2 \mid n_1$ 时，存在 G_1 到 G_2 的满同态映射

证明: 必要性，设φ是 G_1 到 G_2 的满同态映射，$G_2=\langle b\rangle$，

则存在属于 G_1 的 a，使得$\varphi(a)=b$，从而 $e=\varphi(a^{n_1})=b^{n_1}$，因此 $n_2|n_1$，

充分性，设 $G_1=\langle a\rangle$, $G_2=\langle b\rangle$, φ: $G_1\to G_2$, $\varphi(a^m)=b^m$，

若$a^{m_1}=a^{m_2}$，则$a^{m_1-m_2}=e$，从而 $n_1|(m_1-m_2)$

由已知得 $n_2|(m_1-m_2)$，

所以$b^{m_1-m_2}=e$，$b^{m_1}=b^{m_2}$，φ是 G_1 到 G_2 的满同态映射，

习题 13 试证明当且仅当$\varphi(\overline{a})=a\varphi(\overline{1})$, $m\varphi(\overline{1})=\overline{0}$时，$\varphi$: $Z_m\to Z_n$ 是同态映射

证明: 必要性，$\varphi(\overline{a})=\varphi(a\overline{1})=a\varphi(\overline{1})$, $m\varphi(\overline{1})=\varphi(m\overline{1})=\varphi(\overline{0})=\overline{0}$，

充分性，若$\overline{a}=\overline{b}$，则 $m|(a-b)$，由 $m\varphi(\overline{1})=\overline{0}$知$(a-b)\varphi(\overline{1})=\overline{0}$，

从而 $a\varphi(\overline{1})=b\varphi(\overline{1})$，即$\varphi(\overline{a})=\varphi(\overline{b})$, φ是 Z_m 到 Z_n 的映射，

又因为$\varphi(\overline{a}+\overline{b})=(a+b)\varphi(\overline{1})$, $\varphi(\overline{a})+\varphi(\overline{b})=a\varphi(\overline{1})+b\varphi(\overline{1})$，

所以φ是 Z_m 到 Z_n 的同态映射，

习题 14 试求 Z_{12} 到 Z_{15} 的所有同态映射，并求每一个同态映射的核

解: 设φ是 Z_{12} 到 Z_{15} 一个同态映射，则由 $12\varphi(\overline{1})=\overline{0}$知$\varphi(\overline{1})=\overline{0}$，$\overline{5}$，$\overline{10}$，

同态映射$\varphi(\overline{a})=\overline{0}$的核为 Z_{12}

同态映射$\varphi(\overline{a})=a\overline{5}$的核为$\{\overline{0}，\overline{3}，\overline{6}，\overline{9}\}$

同态映射$\varphi(\overline{a})=a\overline{10}$的核为$\{\overline{0}，\overline{3}，\overline{6}，\overline{9}\}$

习题 15 求 Z 到 Z_n 的所有同态映射，

证明: 因为 Z=⟨1⟩是循环群，

所以若设φ是 Z 到 Z_n 一个同态映射，则φ(n)=nφ(1)，即φ完全由φ(1)决定，

又因为φ(a+b)=(a+b)φ(1)=aφ(1)+bφ(1)=φ(a)+φ(b)，

所以 Z 到 Z_n 的同态映射φ有 n 个，分别满足φ(1)=$\overline{0}$，$\overline{1}$，⋯，$\overline{n-1}$，

习题 16 设 H 是群 G 的子群，

试证明 H 是 G 的正规子群⟺对 G 的任意内自同构φ，有φ(H)包含于 H，

证明: 对属于 G 的任意 g，同构映射φ: G→G，a→gag^{-1}是 G 的内自同构，

因此，H 是 G 的正规子群

⟺对属于 G 的任意 g 和对属于 H 的任意 h，有 ghg^{-1}属于 H

⟺对属于 G 的任意 g 和对属于 H 的任意 h，有$φ_g$(H)属于 H

⟺对 G 内任意内自同构φ，有φ(H)包含于 H，

习题 17 设 C(G)是群 G 的中心，φ属于 Aut(G)，试证明φ(C(G))包含于 C(G)，

证明: 对属于 G 的任意 b，存在有属于 G 的 c，使得φ(c)=b，

对属于 C(G)任意 a 有 ac=ca，

且(a)b=φ(a)φ(c)=φ(ac)=φ(ca)=φ(c)φ(a)=bφ(a)，

所以φ(C(G))包含于 C(G)，

习题 18 试证明有理数加法群的任一有限生成子群都是循环群，

证明: 设 $A=\left\{\frac{a_1}{b_1},\frac{a_2}{b_1},\cdots,\frac{a_m}{b_m}\right\}$，其中 a_i，b_i属于 Z，b_i不等于 0，i=1，2，⋯，m，

通过通分可以设 $b_1=b_2=\cdots=b_m=b$，

令 B={a_1，a_2，⋯，a_m}，则⟨A⟩≅⟨B⟩，而⟨B⟩是整数加法群的子群，是循环群，

所以⟨A⟩是循环群，

习题 19 若群 G 的自同构群是 1 阶群，则 G 是交换群，

证明: 对属于 G 的任意 g，定义映射φ: G→G，使得φ(a)=gag^{-1}，

因φ是 G 的自同构映射，从而φ=id_G，则 gag^{-1}=a，G 是交换群，

习题 20 求群 Z_n 的所有自同态和自同构，

证明: 对 $s=0,1,\cdots,n-1$，令$\varphi(\overline{a})=a\overline{s}$，则 $n\varphi(\overline{1})=\overline{0}$，

由习题 12 和习题 13 可知，φ是 Z_n 的(满)自同态映射，

若由 $a\overline{s}=\overline{0}$一定能推出$\overline{a}=\overline{0}$，即由 $n|as$ 一定能推出 $n|a$，则需要$(n,s)=1$，

所以当φ满足$\varphi(\overline{a})=a\overline{s}$，$(n,s)=l$ 时，φ是 Z_n 的自同构

习题 21 证明非交换群的内自同构群不能是循环群，

证明: 根据[习题 2.4 题 10]$G/C(G)\cong Int(G)$，

根据[习题 2.3 题 10]若 $G/C(G)$是循环群，则 G 是交换群，

习题 22 求克莱因四元群 $K_4=\{(1),(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}$的自同构群

解: 若φ是 K_4 的自同构，则φ: $(1)\to(1)$，而对于其余三个元素，

φ将它们做了一个置换，因此，K_4 的自同构群与 S_3 同构，

习题 23 设群 G 只有有限个子群，φ是 G 的自同态，

试证明若φ是满射，则φ是单射，

证明: 由群同态基本定理得 $G/Ker\ \varphi\cong G$，

即 G 的子群个数与 $G/Ker\ \varphi$的子群个数相等，

再由[第二章定理 3.3]知，

$G/Ker\ \varphi$的子群个数与 G 的包含 $Ker\ \varphi$的子群个数相等，

因此，G 的子群个数与 G 的包含 $Ker\ \varphi$的子群个数相等，

因此所有子群包含 $Ker\ \varphi$，当然 $Ker\ \varphi$包含于$\{0\}$，所以φ是单射，