

对于一个数学研究对象，我们经常通过其与同类对象的比较来研究其结构，
 而比较的一个有效的工具就是同态，
 同态可以将一个研究对象的某些性质移入另一个研究对象，
 同构是一种同态，同构的两个研究对象有相同的代数结构及性质，
 群是具有一个运算的代数系统，
 因此，在第一章所介绍的有关代数系统的同态、同构的概念
 可以移到群的同态、同构上
 为了强调同态、同构的概念在群论中的重要性，我们有必要回顾一下这些概念
 设 $\{G; \circ\}$ 和 $\{G'; \bullet\}$ 是两个群， φ 是 G 到 G' 的映射，
 如果 φ 满足 $\varphi(x \circ y) = \varphi(x) \bullet \varphi(y)$ ，其中任意 x, y 属于 G
 那么称 φ 是群 G 到 G' 的同态，简称群同态，并记为 $G \sim G'$
 特别地，若 φ 是群 G 到 G' 的群同态，且 φ 是 G 到 G' 的单射(或满射)，
 则称 φ 是群 G 到 G' 的单同态(或满同态)，
 若 φ 既是单同态又是满同态，则称 φ 是 G 到 G' 的同构，并记为 $G \cong G'$ ，
 若 φ 是 G 到自身的群同态(或群同构)，则称 φ 是 G 的自同态(或自同构)，
 群 G 的所有自同态构成的集合记为 $\text{End}(G)$ ，所有自同构组成的集合记为 $\text{Aut}(G)$

例 4.1 若 H 是群 G 的正规子群，

试证明存在群 G 到商群 G/H 的满同态(称其为自然同态)

$$\pi: G \rightarrow G/H, x \mapsto xH = \bar{x}$$

证: 因 π 是满射，并且 $\pi(xy) = \overline{xy} = \bar{x}\bar{y} = \pi(x)\pi(y)$ ，因此， π 是 G 到 G/H 的满同态

例 4.2 设 G 是群， a 属于 G ，证明 $\langle a \rangle \sim G$ ，

证: 定义映射 $\varphi: \langle a \rangle \rightarrow G$ ，使得 $\varphi(a^r) = a^r$ ，其中 r 属于 $\mathbb{Z}$ ，

显然， φ 是单射，且 $\varphi(a^s a^r) = \varphi(a^s) \varphi(a^r)$ ，因此， φ 是 $\langle a \rangle$ 到 G 的单同态，

例 4.3 令 $H=\{\bar{0}, \bar{6}, \bar{12}\}$ 是剩余类加法群 Z_{18} 的子群, 试证明 $(Z_{18}/H) \cong Z_6$

证: 因为 Z_{18} 是交换群, 所以 H 是 Z_{18} 的正规子群,

再由商群的定义可知, $Z_{18}/H=\{\bar{0}+H, \bar{1}+H, \bar{2}+H, \bar{3}+H, \bar{4}+H, \bar{5}+H\}$,

定义映射 $\varphi: Z_{18}/H \rightarrow Z_6$, 使得 $\varphi(\bar{a}+H)=\bar{a}$, 其中 $a=0, 1, 2, 3, 4, 5$,

因 φ 是双射且 $\varphi((\bar{a}+H)+(\bar{b}+H))=\varphi((\bar{a}+\bar{b})+H)=\overline{a+b}=\bar{a}+\bar{b}=\varphi(\bar{a}+H)+\varphi(\bar{b}+H)$

所以 φ 是群 Z_{18}/H 到 Z_6 的同构,

例 4.4 设 G 是群, 试证明映射 $\text{ad}_g: G \rightarrow G, x \rightarrow gxg^{-1}$ 是群 G 的自同构

(一般地, 称 ad_g 是 G 的内自同构),

证: 因为对属于群 G 的任意 a, b , 有

$$\text{ad}_g(ab)=g(ab)g^{-1}=gag^{-1}gbg^{-1}=\text{ad}_g(a)\text{ad}_g(b),$$

所以 ad_g 是 G 的自同态, 显然, $g^{-1}ag$ 是 a 的原像, 即 ad_g 是满射,

又若 $\text{ad}_g(a)=\text{ad}_g(b)$, 则 $gag^{-1}=gbg^{-1}, a=b$, 即 ad_g 是单射, 故 ad_g 是 G 的自同构

命题 4.1 设 φ 是群 G 到 G' 的同态, 则

(1) $\varphi(e)=e'$, 其中 e, e' 分别是 G 和 G' 中的单位元素;

(2) $\varphi(x^{-1})=\varphi(x)^{-1}$, 其中任意 x 属于 G ;

(3) 若 H 是 G 的子群, 则 $\varphi(H)$ 是 G' 的子群;

(4) 若 H' 是 G' 的子群, 则 $\varphi^{-1}(H')$ 是 G 的子群,

证: (1) 由 $e'\varphi(e)=\varphi(e)=\varphi(ee)=\varphi(e)\varphi(e)$ 及群的消去律, 我们有 $\varphi(e)=e'$,

(2) 根据 $\varphi(x^{-1})\varphi(x)=\varphi(x^{-1}x)=\varphi(e)=e'$, 有 $\varphi(x)^{-1}=\varphi(x^{-1})$,

(3) 显然, $\varphi(H)$ 是 G' 的非空子集, 又对属于 $\varphi(H)$ 的任意 $\varphi(x), \varphi(y)$,

有 $\varphi(x)\varphi(y)^{-1}=\varphi(x)\varphi(y^{-1})=\varphi(xy^{-1}) \in \varphi(H)$,

因此, 根据定理 2.1 可知, $\varphi(H)$ 是 G' 的子群

(4) 因为 $\varphi(e)=e'$ 属于 H' , 所以 $\varphi^{-1}(H')$ 是 G 的非空子集,

又对属于 $\varphi^{-1}(H')$ 的任意 x, y , 有 $\varphi(x), \varphi(y)$ 属于 H' ,

$\varphi(xy^{-1})=\varphi(x)\varphi(y^{-1})=\varphi(x)\varphi(y)^{-1}$ 属于 H' , 即 xy^{-1} 属于 $\varphi^{-1}(H')$,

因此, 根据定理 2.1 可知, $\varphi^{-1}(H')$ 是 G 的子群,

命题 4.2 设 φ 是群 G 到 G' 的同态，则

(1) φ 的同态像 $\text{Im } \varphi = \varphi(G)$ 是 G' 的子群；

(2) φ 的同态核 $\text{Ker } \varphi = \{x \in G \mid \varphi(x) = e'\}$ 是 G 的正规子群，其中 e' 是 G' 的单位元素

(3) φ 是群 G 到 G' 的单同态 $\Leftrightarrow \text{Ker } \varphi = \{e\}$ ，其中 e 是 G 的单位元素，

证:(1)因为 $\varphi(G)$ 是 G' 的子群，所以根据命题 4.1(3), $\text{Im } \varphi = \varphi(G)$ 是 G' 的子群，

(2)由于 $\{e'\}$ 是 G' 的子群，根据命题 4.1(4), $\text{Ker } \varphi = \varphi^{-1}(e')$ 是 G 的子群，

下面证明 $\text{Ker } \varphi$ 是 G 的正规子群，

因为对属于 $\text{Ker } \varphi$ 的任意 x ，和属于 G 的任意 g ，

有 $\varphi(gxg^{-1}) = \varphi(g)\varphi(x)\varphi(g^{-1}) = \varphi(g)e'\varphi(g)^{-1} = e'$ ，即 gxg^{-1} 属于 $\text{Ker } \varphi$ ，

所以(2)的结论成立，

(3)若 φ 是 G 到 G' 的单同态，则 $\varphi^{-1}(e')$ 仅含有一个元素，而 e 属于 $\varphi^{-1}(e')$ ，

因此 $\text{Ker } \varphi = \varphi^{-1}(e') = \{e\}$ ，

反之，若 $\text{Ker } \varphi = \{e\}$ ，

则当 $\varphi(x) = \varphi(y)$ 时，有 $\varphi(xy^{-1}) = \varphi(x)\varphi(y^{-1}) = \varphi(x)\varphi(y)^{-1} = e'$ ，即 xy^{-1} 属于 $\text{Ker } \varphi$

从而 $xy^{-1} = e$, $x = y$ ，所以 φ 是群 G 到 G' 的单同态，

定理 4.1(群同态基本定理) 设 φ 是群 G 到 G' 的同态，则 $G/\text{Ker } \varphi \cong \text{Im } \varphi$ ，

证： 记 $\text{Ker } \varphi = H$ ，则 H 是 G 的正规子群，

我们定义 $\psi: G/H \rightarrow \text{Im } \varphi$ ，使得对属于 G/H 的任意 xH ，有 $\psi(xH) = \varphi(x)$ ，如图 2.1

下面我们证明 ψ 是 G/H 到 $\text{Im } \varphi$ 的同构映射，

首先， ψ 是 G/H 到 $\text{Im } \varphi$ 的映射，对属于 G/H 的任意 xH, yH ，

若 $xH = yH$ ，则 $x^{-1}y$ 属于 H ，从而 $\varphi(x^{-1}y) = e'$ (e' 是 G' 的单位元)，

进而 $\varphi(x) = \varphi(y)$ ，所以 $\psi(xH) = \psi(yH)$ ，

其次， ψ 是 G/H 到 $\text{Im } \varphi$ 的同态映射，对属于 G 的任意 x, y ，

有 $\psi((xH)(yH)) = \psi(xyH) = \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) = \psi(xH)\psi(yH)$ ，

最后， ψ 是双射，它的满射性是显然的，

另外，如果 xH 属于 $\text{Ker } \psi$ ，则 $e' = \psi(xH) = \varphi(x)$ ，即 x 属于 $\text{Ker } \varphi = H$ ，

所以 $xH = H$ ， $\text{Ker } \psi = \{H\}$ ，这表明 ψ 是单射，

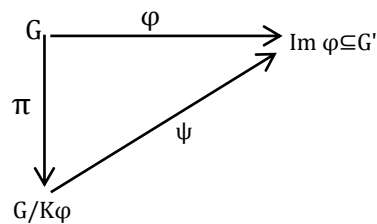


图 2.1

定理 4.2 设 H 是群 G 的正规子群, K 是 G 的子群, 试证明:

(1) HK 是 G 的子群, H 是 HK 的正规子群;

(2) (群的第一同构定理) $K/(K \cap H) \cong (HK)/H$;

(3) (群的第二同构定理) 若 K 是 G 的正规子群, 且 H 包含于 K , 则 $(G/H)/(K/H) \cong (G/K)$,

证: (1) 因为对属于 H 的任意 h_1, h_2 , 和对属于 K 的任意 k_1, k_2 ,

有 $(h_1 k_1)(h_2 k_2)^{-1} = h_1 k_1 k_2^{-1} h_2^{-1}$,

令 $k_1 k_2^{-1} = k$, 则由 H 是 G 的正规子群可知 $kh_2^{-1}k^{-1}$ 属于 H ,

从而 $(h_1 k_1)(h_2 k_2)^{-1} = h_1 kh_2^{-1}k^{-1}k$ 属于 HK , 因此, HK 是 G 的子群,

因为 H 是 G 的正规子群, H 包含于 HK , 所以 H 是 HK 的正规子群,

(2) 定义映射 $\varphi: K \rightarrow (HK)/H$, 使得 $\varphi(k) = kH$,

因为对属于 K 的任意 k_1, k_2 , 有 $\varphi(k_1 k_2) = (k_1 k_2)H = (k_1 H)(k_2 H) = \varphi(k_1)\varphi(k_2)$

所以 φ 是 K 到 $(HK)/H$ 的群同态,

下面考证 φ 是满射, 因为 HK 是 φ 的子群, 因此, $HK = KH$,

那么对属于 H 的任意 h 和对属于 K 的任意 k ,

存在有属于 H 的 h' 和属于 K 的 k' , 使得 $hk = k'h'$,

再由 $\varphi(k') = k'H = k'h'H = hkH$ 可知 φ 是满射,

因为 $\text{Ker } \varphi = \{h \in K | kH = H\} = \{k \in K | k \in H\} = K \cap H$,

所以由同态基本定理得 $K/(K \cap H) \cong (HK)/H$,

(3) 根据群同态基本定理, 要证明 $(G/H)/(K/H) \cong (G/K)$,

只需要说明 $\varphi: G/H \rightarrow G/K, gH \rightarrow gK$ 是满同态, 且 $\text{Ker } \varphi = K/H$,

对属于 G 的任意 g_1, g_2 , 若 $g_1 H = g_2 H$, 则 $g_1^{-1} g_2$ 属于包含于 K 的 H ,

从而 $g_1 K = g_2 K$, 即 φ 是 G/H 到 G/K 的映射, φ 的满射性是显然的,

另外, 由 K 和 H 是群 G 的正规子群得

$\varphi((g_1 H)(g_2 H)) = \varphi(g_1 g_2 H) = g_1 g_2 K = (g_1 K)(g_2 K) = \varphi(g_1 H)\varphi(g_2 H)$,

因而 φ 是 G/H 到 G/K 的满同态,

另外, $\text{Ker } \varphi = \{gH | gK = K\} = \{gH | g \in K\} = K/H$, 所以结论得证,

定理 4.3 任何一个群都与一个变换群同构，

证： 设 G 是一个群，下面我们来证群 G 与它的左乘变换群 $L(G)$ 同构，

定义映射 $\varphi: G \rightarrow L(G), x \rightarrow L_x$ ，显然 φ 是满射，

若 $L_x = L_y$ ，则对属于 G 的任意 z ，有 $xz = yz$ ，从而 $x = y$ ，即 φ 是单射，

对属于 G 的任意 x, y ，有 $\varphi(xy) = L_{xy} = L_x L_y = \varphi(x) \varphi(y)$ ，所以， G 与 $L(G)$ 同构

推论 4.1 任一个有限群都与一个置换群同构