1，证明命题 6.1，

证明： 命题 6.1 的(1)证明略，

(2)a_i，b_i 都属于 G_i，$i=1，2，\cdots，n$，

因为$(a_1，a_2，\cdots，a_n)(b_1，b_2，\cdots，b_n)=(a_1b_1，a_2b_2，\cdots，a_nb_n)$，

$(b_1，b_2，\cdots，b_n)(a_1，a_2，\cdots，a_n)=(b_1a_1，b_2a_2，\cdots，b_na_n)$，

所以 $\prod_{i=1}^{n} G_i$ 是交换群的充分必要条件是$G_1，G_2，\cdots，G_n$ 是交换群

2，试确定 $Z_4\times Z_6$ 中 6 阶元素的个数，$Z_5\times Z_{15}$ 中 5 阶元素的个数，

解： Z_4 中元素的阶为 $m=1，2，4$， Z_6 中元素的阶为 $n=1，2，3，6$，

要得到 $Z_4\times Z_6$ 中 6 阶元，则$[m，n]=6$，$m=1$，$n=6$ 或 $m=2$，$n=3，6$，

而 Z_4 中 1 阶元为$\overline{0}$，2 阶元为$\overline{2}$，Z_6 中 3 阶元为$\overline{2}$，$\overline{4}$，6 阶元为$\overline{1}$，$\overline{5}$，

因此 $Z_4\times Z_6$ 中 6 阶元为$(\overline{0}，\overline{1})$，$(\overline{0}，\overline{5})$，$(\overline{2}，\overline{2})$，$(\overline{2}，\overline{4})$，$(\overline{2}，\overline{1})$，$(\overline{2}，\overline{5})$，

即 6 阶元共有 6 个，

Z_5 中元素的阶为 $m=1，5$，Z_{15} 中元素的阶为 $n=1，3，5，15$，

若$[m，n]=5$，则 $m=1$，$n=5$ 或 $m=5$，$n=1，5$，

又因 Z_5 中 1 阶元为$\overline{0}$，5 阶元为$\overline{1}$，$\overline{2}$，$\overline{3}$，$\overline{4}$

Z_{15} 中 1 阶元为$\overline{0}$，5 阶元为$\overline{3}$，$\overline{6}$，$\overline{9}$，$\overline{12}$，

因此 $Z_5\times Z_{15}$ 中 5 阶元共有 24 个，

3，判断 $Z_5\times Z_7$ 是否是循环群，如果是循环群，请给出它的生成元，

解： $\overline{1}$属于 Z_5，$\overline{1}$属于 Z_7，$(\overline{1}，\overline{1})$的阶为$[5，7]=35$，

所以$\langle(\overline{1}，\overline{1})\rangle=Z_5\times Z_7$ 是循环群，

4，试说明群 $Z_2\times Z_3$ 与群 Z_6 同构，

解： Z_2，Z_3 分别为 2，3 阶循环群，且$(2，3)=1$，从而 $Z_2\times Z_3$ 中存在 6 阶元，

因此 $Z_2\times Z_3$ 是 6 阶循环群，故 $Z_2\times Z_3\cong Z_6$

5，试说明群 $Z_2\times Z_2$ 与群 Z 不同构，

解: 因为 Z_2 元素的阶为 1 或 2，

所以 $Z_2\times Z_2$ 元素的阶为 1 或 2，即没有 4 阶元，不是循环群，

而 Z_4 是循环群，因此群 $Z_2\times Z_2$ 与群 Z_4 不同构，

6，请通过比较元素的阶证明 $Z_8\times Z_2$ 不同构于 $Z_4\times Z_4$

证明: Z_8 中元素阶为 1，2，4，8，Z_2 中元素阶为 1，2，

从而 $Z_8\times Z_2$ 中元素的最高阶为 8，

而 $Z_4\times Z_4$ 中元素的阶为 1，2，4，无 8 阶元，从而 $Z_8\times Z_2$ 与 $Z_4\times Z_4$ 不同构，

7，已知 $G_1=\{(1),(12)(34)\}$，$G_2=\{(1),(13)(24)\}$

是群 $G=\{(1),(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}$的两个子群，

试证 G 是 G_1 和 G_2 的直和

证明: G_1 和 G_2 在 G 中的指数为 2，因而都是正规子群，且 $G=G_1G_2$，$G_1\cap G_2=\{(1)\}$，

因此 G 是 G_1 和 G_2，的直和，即 $G=G_1\oplus G_2$

8，设 G 是循环群，且$|G|=p_1^{s_1}p_2^{s_2}\cdots p_n^{s_n}$

其中 s_i 属于 Z^+，p_i 是互不相同的素数$(i=1,2,\cdots,n)$

试证明 G 有阶为$p_1^{s_1}$的子群 $G_i(i=1,2,\cdots,n)$，且 $G=\bigoplus_{i=1}^{n}G_i$，

证明: 设 $G=\langle a\rangle$，令 $n_i=\frac{|G|}{p_i^{s_i}}$，则 $G_i=\langle a^{n_i}\rangle$是 G 的阶为$p_i^{s_i}$的子群，

由[第二章例 6.5]可知 $G=\bigoplus_{i=1}^{n}G_i$，

9，设 $G_1, G_2, \cdots, G_n$ 是群 G 的正规子群，

若 $G=G_1G_2\cdots G_n$，试证明下述两个条件等价:

(1)G 中每个元素可唯一地表示为 $a_1a_2\cdots a_n$ 的形式，其中 a_i 属于 G_i，$i=1, 2, \cdots, n$

(2)G 中单位元可唯一地表示为 $a_1a_2\cdots a_n$ 的形式，其中 a_i 属于 G_i，$i=1, 2, \cdots, n$

证明: (1)⇒(2)显然，

(2)⇒(1)，若 x 属于 $G_i \cap G_j$，$i \neq j$，则令 $x=a_i=a_j$，那么 $e=a_ia_j^{-1}$，

根据单位元表法唯一可知 $e=a_i=a_j^{-1}$，从而 $G_i \cap G_j=\{e\}$，

又因为 G_i, G_j 是正规子群，所以 $a_ia_j=a_ja_i$，

若 $a=a_1a_2\cdots a_n=b_1b_2\cdots b_n$，则 $e=a_1a_1^{-1}a_2a_2^{-1}\cdots a_na_n^{-1}$

根据单位元表法唯一可知 $a_ia_i^{-1}=e$，$a_i=b_i$，即 a 的表法唯一

10，试确定 $Z \oplus Z$ 是否是循环群，

解: 若 $Z \oplus Z$ 是循环群，设 $Z \oplus Z=\langle(a, b)\rangle$，令 $(1, 0)=r(a, b)$，则 $ra=1$，$rb=0$，因此 $b=0$，

同理由 $(0, 1)=s(a, b)$ 可得 $a=0$，从而 $Z \oplus Z=\langle(a, b)\rangle=\langle(0, 0)\rangle=\{(0, 0)\}$，矛盾，

故 $Z \oplus Z$ 不是循环群，

11，令 G 是 p^k(p 是素数)阶循环群，证明 G 不能表示成其真子群的直和，

证明: 反证，设 $G=\bigoplus_{i=1}^{n} G_i$，且 $|G_i|=p^{k_i}$，$k_i<k$，令 $G_i=\langle g_i\rangle$，

则 $\bigoplus_{i=1}^{n} G_i$ 中元素阶最大值为 $[p^{k_1}, p^{k_2}, \cdots, p^{k_n}]<p^k$，

所以 $\bigoplus_{i=1}^{n} G_i$ 不是 p^k(p 是素数)阶循环群，矛盾，

习题 1 求群$Z_3^*\times Z_6$的所有元素的阶，

解: 群Z_3^*的元素$\overline{1}$，$\overline{2}$的阶依次为 1，2，

群 Z_6 的元素$\overline{0}$，$\overline{1}$，$\overline{2}$，$\overline{3}$，$\overline{4}$，$\overline{5}$的阶依次为 1，6，3，2，3，6，

由[第二章推论 6.1]知，

$(\overline{1}，\overline{0})$，$(\overline{1}，\overline{1})$，$(\overline{1}，\overline{2})$，$(\overline{1}，\overline{3})$，$(\overline{1}，\overline{4})$，$(\overline{1}，\overline{5})$的阶依次为 1，6，3，2，3，6，

$(\overline{2}，\overline{0})$，$(\overline{2}，\overline{1})$，$(\overline{2}，\overline{2})$，$(\overline{2}，\overline{3})$，$(\overline{2}，\overline{4})$，$(\overline{2}，\overline{5})$的阶依次为 2，6，6，2，6，6，

习题 2 设 G 是 $n=st$ 阶循环群，且$(s,t)=1$，

试证明 G 可以表示成 s 阶和 1 阶子群的直和，

证明: 设 $G=\langle a\rangle$，则 G 有 s 阶子群$\langle a^{\frac{n}{s}}\rangle$和 t 阶子群$\langle a^{\frac{n}{t}}\rangle$，

由$(s,t)=1$ 可知$\langle a^t\rangle\cap\langle a^s\rangle=\{0\}$，$|\langle a^t\rangle+\langle a^s\rangle|=st$，

故 $G=\langle a^t\rangle\oplus\langle a^s\rangle$，

习题 3 设 G 是 n 阶循环群，证明 G 可以表示为其子群直和的形式，

证明: 设 n 的标准分解式是 $n=p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_t^{k_t}$，

其中 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 是 n 的不同素因子，

根据[第二章例 6.5]，只需要证明 G 有$p_i^{k_i}$阶子群，

设 $G=\langle a\rangle$，$r_i=\frac{n}{p_i^{k_i}}$，则$\langle a^{r_i}\rangle$是$p_i^{k_i}$阶子群，

习题 4 证明 $Z_m\times Z_n$ 是循环群的充分必要条件是 m 与 n 互素

证明: 根据(a,b)的阶为 a 与 b 阶的最小公倍数，

可知 $Z_m\times Z_n$ 为循环群的充分必要条件是 $Z_m\times Z_n$ 中有阶为 mn 的元素(a,b)，

则 a 与 b 的阶分别为 m 和 n，且 m 与 n 互素，反之显然，

习题 5 证明 $Z_2\oplus Z_2\cong K_4$

证明: $Z_2\oplus Z_2$ 是 4 阶群，且没有 4 阶元素，因此与克莱因四元群同构，

习题 6 求 $Z_{10}\times Z_6$ 中 10 阶元素的个数，

解: 若 a 属于 Z_{10}，b 属于 Z_6，则(a，b)的阶是 a，b 阶的最小公倍数，

Z_{10} 中

元素$\overline{0}$的阶为 1，

元素$\overline{1}$，$\overline{3}$，$\overline{7}$，$\overline{9}$的阶为 10，

元素$\overline{2}$，$\overline{4}$，$\overline{6}$，$\overline{8}$的阶为 5，

元素$\overline{5}$的阶为 2;

Z_6 中

元素$\overline{0}$的阶为 1，

元素$\overline{1}$，$\overline{5}$的阶为 6，

元素$\overline{2}$，$\overline{4}$的阶为 3，

元素$\overline{3}$的阶为 2，

$Z_{10}\times Z_6$ 中阶为 10 的元素有$(\overline{1},\overline{0})$，$(\overline{3},\overline{0})$，$(\overline{7},\overline{0})$，$(\overline{9},\overline{0})$，$(\overline{1},\overline{3})$，$(\overline{3},\overline{3})$，$(\overline{7},\overline{3})$，$(\overline{9},\overline{3})$，$(\overline{2},\overline{3})$，$(\overline{4},\overline{3})$，$(\overline{6},\overline{3})$，$(\overline{8},\overline{3})$，共 12 个，

习题 7 设 G_1，G_2 都是群，

试证明$\varphi: G_1\times G_2\to G_1$，$(a,b)\to a$ 是 $G_1\times G_2$ 到 G_1 的满同态，且 $\mathrm{Ker}\,\varphi\cong G_2$，

证明: 因φ是满射，

且$\varphi((a_1,b_1)\cdot(a_2,b_2))=\varphi((a_1a_2,b_1b_2))=a_1a_2=\varphi((a_1,b_1))\varphi((a_2,b_2))$，

因此φ是 $G_1\times G_2$ 到 G_1 的满同态，

$\mathrm{Ker}\,\varphi=\{(a,b)|a=e\}=\{e\}\times G_2\cong G_2$

习题 8 设 G_1 , G_2 是群 , $G=G_1\times G_2$, 试证明 $C(G)=C(G_1)\times C(G_2)$,

证明: 若(a , b)属于 C(G) ,

则对属于 G 的任意(a' , b') , 有(a'a , b'b)=(a' , b')(a , b)=(a , b)(a' , b')=(aa' , bb') ,

即 a'a=aa' , b'b=bb' , (a , b)属于 $C(G_1)\times C(G_2)$,

反之 , 若(a , b)属于 $C(G_1)\times C(G_2)$,

则对属于 G 的任意(a' , b') , 有(a' , b')(a , b)=(a'a , b'b)=(aa' , bb')=(a , b)(a' , b') ,

即(a , b)属于 C(G) ,