

**定义 6.1** 设  $G_1, G_2, \dots, G_n$  是  $n$  个群，

如果在它们的笛卡儿积  $\prod_{i=1}^n G_i = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$  上

规定运算  $(a_1, a_2, \dots, a_n)(b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1b_1, a_2b_2, \dots, a_nb_n)$ ,

其中任意  $a_i, b_i$  属于  $G_i, i=1, 2, \dots, n$ ,

则  $\prod_{i=1}^n G_i$  关于该运算构成群，我们称这样得到的群为  $G_1, G_2, \dots, G_n$  的直积，

群  $\prod_{i=1}^n G_i$  的单位元是  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  ( $e_i$  是  $G_i$  的单位元)

元素  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  的逆元为  $(a_1^{-1}, \dots, a_n^{-1})$ ,

通过直积我们可以由已知群生成一个新群，

一个群的子群也可以生成一个新群，

例如， $H=\{\bar{0}, \bar{3}\}$  和  $K=\{\bar{0}, \bar{4}\}$  是  $Z_6$  的两个子群，

则  $H$  与  $K$  的直积为  $H \times K = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{4}), (\bar{3}, \bar{0}), (\bar{3}, \bar{2}), (\bar{3}, \bar{4})\}$

注意， $H+K=\{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{1}\}=Z_6 \neq H \times K$

**命题 6.1** (1) 群  $\prod_{i=1}^n G_i$  是有限群的充分必要条件是  $G_1, G_2, \dots, G_n$  是有限群

(2) 群  $\prod_{i=1}^n G_i$  是交换群的充分必要条件是  $G_1, G_2, \dots, G_n$  是交换群

**命题 6.2** 设  $a$  是群  $G_1$  中的  $m$  阶元素， $b$  是群  $G_2$  中的  $n$  阶元素，

则元素  $(a, b)$  是群  $G_1 \times G_2$  中的  $[m, n]$  阶元素，

这里  $[m, n]$  表示  $m$  和  $n$  的最小公倍数，

**证:** 设  $e_1, e_2$  分别是  $G_1$  和  $G_2$  的单位元，

因为  $(a, b)^{[m, n]} = (a^{[m, n]}, b^{[m, n]}) = (e_1, e_2)$ ，所以  $(a, b)$  是有限阶元素，

设  $(a, b)$  的阶为  $q$ ，则  $q | [m, n]$ ，

又因  $(e_1, e_2) = (a, b)^q = (a^q, b^q)$ ，所以  $a^q = e_1, b^q = e_2$

因此  $m | q, n | q$ ，于是  $[m, n] | q$ ，即  $[m, n] = q$ ，也就是说， $(a, b)$  的阶为  $[m, n]$ ，

用数学归纳法可以证明如下推论:

**推论 6.1** 设  $G_i (1 \leq i \leq n)$  是群, 若  $a_i$  是群  $G$  中的  $m_i$  阶元素,

则群  $\prod_{i=1}^n G_i$  中元素  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  的阶为  $[m_1, m_2, \dots, m_n]$

(表示  $m_1, m_2, \dots, m_n$  的最小公倍数),

**例 6.1** 试确定  $Z_4 \times Z_6$  中 12 阶元素的个数,

**解:**  $Z_4$  中元素  $\bar{0}, \bar{3}$  的阶  $m$  分别为 1, 4, 2, 4,

$Z_6$  中元素  $\bar{0}, \bar{5}$  的阶  $n$  分别为 1, 6, 3, 2, 3, 6,

如果  $[m, n] = 12$ , 则  $m = 4, n = 3$ , 或 6,

所以  $Z_4 \times Z_6$  中 12 阶元素有 8 个,

分别为  $(\bar{1}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{2}), (\bar{1}, \bar{4}), (\bar{1}, \bar{5}), (\bar{3}, \bar{1}), (\bar{3}, \bar{2}), (\bar{3}, \bar{4}), (\bar{3}, \bar{5})$ ,

显然,  $Z_4 \times Z_6$  中无 24 阶元素, 因此,  $Z_4 \times Z_6$  不是循环群,

设  $G_1, G_2, \dots, G_n$  是群,

令  $G'_i = \{e_1\} \times \dots \times \{e_{i-1}\} \times G_i \times \{e_{i+1}\} \times \dots \times \{e_n\}$  ( $e_i$  是  $G_i$  的单位元),  $i=1, 2, \dots, n$ ,

现在我们来考察直积  $\prod_{i=1}^n G_i$  与子集族  $G'_i$  的关系

**定理 6.1** 设  $G_1, G_2, \dots, G_n$  是群,  $e_i (i=1, 2, \dots, n)$  是  $G_i$  的单位元, 则

$$(1) \prod_{i=1}^n G_i = G'_1 G'_2 \dots G'_n$$

$$(2) G'_i \cap (G'_1 \dots G'_{i-1} G'_{i+1} \dots G'_n) = (e_1, e_2, \dots, e_n)$$

$$(3) G'_i \text{ 是 } \prod_{i=1}^n G_i \text{ 的正规子群, 且 } G'_i \cong G_i$$

**证:** (1) 对属于  $G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$  的任意  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ ,

有  $(a_1, a_2, \dots, a_n) = (a_1, e_2, \dots, e_n)(e_1, a_2, \dots, e_n) \dots (e_1, e_2, \dots, a_n)$  属于  $G'_1 G'_2 \dots G'_n$

所以  $\prod_{i=1}^n G_i$  包含于  $G'_1 G'_2 \dots G'_n$ ,

易知  $G'_1 G'_2 \dots G'_n$  包含于  $\prod_{i=1}^n G_i$

$$\text{故 } \prod_{i=1}^n G_i = G'_1 G'_2 \dots G'_n$$

(2) 根据  $G'_i$  的定义可知

$G'_1 \dots G'_{i-1} G'_{i+1} \dots G'_n$  中元素的形式为  $(a_1, \dots, a_{i-1}, e_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$ ,

$G'_i$  中元素的形式为  $(e_1, \dots, e_{i-1}, a_i, e_{i+1}, \dots, e_n)$ ,

因而, 若  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  属于  $G'_i \cap (G'_1 \dots G'_{i-1} G'_{i+1} \dots G'_n)$

则  $(a_1, a_2, \dots, a_n) = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ ,

(3) 因为  $G'_i$  是非空集合,

对属于  $G'_i$  的任意  $a, b$ , 和属于  $\prod_{i=1}^n G_i$  的  $g$ , 可令

$a = (e_1, \dots, e_{i-1}, a_i, e_{i+1}, \dots, e_n)$ ,  $b = (e_1, \dots, e_{i-1}, b_i, e_{i+1}, \dots, e_n)$ ,  $g = (g_1, g_2, \dots, g_n)$ ,

其中  $a_i, b_i, g_i$  都属于  $G_i$ ,

则  $ab^{-1} = (e_1, \dots, e_{i-1}, a_i, e_{i+1}, \dots, e_n)(e_1, \dots, e_{i-1}, b_i^{-1}, e_{i+1}, \dots, e_n)$

$= (e_1, \dots, e_{i-1}, a_i b_i^{-1}, e_{i+1}, \dots, e_n)$  属于  $G_i'$

$gag^{-1}$

$= (g_1, \dots, g_{i-1}, g_i, g_{i+1}, \dots, g_n)(e_1, \dots, e_{i-1}, a_i, e_{i+1}, \dots, e_n)$

$(g_1^{-1}, \dots, g_{i-1}^{-1}, g_i^{-1}, g_{i+1}^{-1}, \dots, g_n^{-1})$

$= (e_1, \dots, e_{i-1}, g_i a_i g_i^{-1}, e_{i+1}, \dots, e_n)$  属于  $G_i'$ ,

所以,  $G_i'$  是  $\prod_{i=1}^n G_i$  的正规子群

另外, 映射  $\varphi_i: G_i' \rightarrow G_i, (e_1, \dots, e_{i-1}, a_i, e_{i+1}, \dots, e_n) \rightarrow a_i$

就是  $G_i'$  到  $G_i$  的同构映射, 因而,  $G_i' \cong G_i$ ,

定理 6.1 说明群  $\prod_{i=1}^n G_i$  可以表示为它的一些正规子群  $G_i'$  的乘积的形式

那么对于一个群来说是否可以将其表示为它的一些正规子群的乘积呢?

如果可以, 则对于群的研究就归结为对于它的正规子群的研究,

从而可简化问题,

**定义 6.2** 设  $G_1, G_2, \dots, G_n$  是群  $G$  的正规子群, 如果

$$(1) G = G_1, G_2, \dots, G_n$$

$$(2) G_i \cap (G_1 \cdots G_{i-1} G_{i+1} \cdots G_n) = \{e\} (e \text{ 是 } G \text{ 的单位元}), i=1, 2, \dots, n,$$

则称  $G$  是子群  $G_1, G_2, \dots, G_n$  的直和, 记为  $G = G_1 \oplus G_2 \oplus \cdots \oplus G_n$  或  $\bigoplus_{i=1}^n G_i$

**例 6.2** 令  $G = \left\{ \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \mid A_1, A_2 \in GL_2(R) \right\}$  是 4 阶一般线性群  $GL_4(R)$  子群,

$H = \left\{ \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} \mid A \in GL_2(R) \right\}$  和  $K = \left\{ \begin{pmatrix} E_2 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \mid A \in GL_2(R) \right\}$  是群  $G$  的子群,

其中  $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , 试证明  $G$  是  $H$  和  $K$  的直和

**证:** 对属于  $G$  的任意  $\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$  和属于  $H$  的  $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix}$  有

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A_1 A A_1^{-1} & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} \text{ 属于 } H$$

所以, 群  $H$  是群  $G$  的正规子群, 类似地, 群  $K$  也是群  $G$  的正规子群,

另外, 容易验证,  $G = HK, H \cap K = \{e\}$ , 因此  $G$  是  $H$  和  $K$  的直和,

**例 6.3** 设群  $G$  是其子群  $G_1, G_2, \dots, G_n$  的直和, 试证明  $a_i a_j = a_j a_i$

其中  $a_i$  属于  $G_i, a_j$  属于  $G_j, i, j=1, 2, \dots, n$ , 且  $i \neq j$ ,

**证:** 由  $G_i$  和  $G_j$  是  $G$  的正规子群得

$$a_i a_j a_i^{-1} a_j^{-1} \in (G_i \cap G_j) \subseteq (G_i \cap (G_1 \cdots G_{i-1} G_{i+1} \cdots G_n)) = \{e\},$$

从而  $a_i a_j a_i^{-1} a_j^{-1} = e$ , 即  $a_i a_j = a_j a_i$ ,

**命题 6.3** 设  $G_1, G_2, \dots, G_n$  是群  $G$  的正规子群，

则当且仅当  $G$  中每个元素可以唯一地表示为  $a_1 a_2 \cdots a_n$  的形式时，

$G$  是  $G_1, G_2, \dots, G_n$  的直和，其中  $a_i$  属于  $G_i, i=1, 2, \dots, n$ ，

**证：** 设  $G$  是  $G_1, G_2, \dots, G_n$  直和，并令  $a_i, b_i$  都属于  $G_i, i=1, 2, \dots, n$ ，

若  $a_1 a_2 \cdots a_n = b_1 b_2 \cdots b_n$ ，则由例 6.3 得

$$b_i^{-1} a_i = b_1 a_1^{-1} \cdots b_{i-1} a_{i-1}^{-1} b_{i+1} a_{i+1}^{-1} \cdots b_n a_n^{-1} \text{ 属于 } (G_i \cap (G_1 \cdots G_{i-1} G_{i+1} \cdots G_n)) = \{e\},$$

因此， $a_i = b_i, i=1, 2, \dots, n$ ，即  $G$  中每个元素可以唯一表为  $a_1 a_2 \cdots a_n$  的形式，

反之，欲证  $G$  是  $G_1, G_2, \dots, G_n$  的直和，仅需证  $(G_i \cap (G_1 \cdots G_{i-1} G_{i+1} \cdots G_n)) = \{e\}$ ，

因为对任意  $i=1, 2, \dots, n$ ，

若  $a$  属于  $(G_i \cap (G_1 \cdots G_{i-1} G_{i+1} \cdots G_n))$ ，则存在属于  $G_i$  的  $a_i, (i=1, 2, \dots, n)$

使得  $a = e \cdots e a_i e \cdots e = a \cdots a_{i-1} e a_{i+1} \cdots a_n$  属于  $G_1 \cdots G_{i-1} G_{i+1} \cdots G_n$ ，

由表法的唯一性可知  $a_i = e, i=1, 2, \dots, n$ ，所以  $a = e$ ，

**定理 6.2** 若群  $G$  是其子群  $G_1, G_2, \dots, G_n$  的直和，则  $\prod_{i=1}^n G_i \cong G_1, G_2, \dots, G_n$

**证：** 考虑映射  $\varphi: \prod_{i=1}^n G_i \rightarrow G_1 G_2 \cdots G_n, (a_1, a_2, \dots, a_n) \rightarrow a_1 a_2 \cdots a_n$

显然  $\varphi$  是满射

由命题 6.3 知  $G_1 G_2 \cdots G_n$  中元素表法唯一，因而  $\varphi$  是单射，

再根据例 6.3 有

$$\varphi((a_1, a_2, \dots, a_n)(b_1, b_2, \dots, b_n))$$

$$= \varphi((a_1 b_1, a_2 b_2, \dots, a_n b_n))$$

$$= (a_1 b_1)(a_2 b_2) \cdots (a_n b_n)$$

$$= a_1 a_2 \cdots a_n b_1 b_2 \cdots b_n$$

$$= \varphi((a_1, a_2, \dots, a_n)) \varphi((b_1, b_2, \dots, b_n))$$

所以  $\varphi$  是  $\prod_{i=1}^n G_i$  到  $G_1, G_2, \dots, G_n$  的同构映射，从而  $\prod_{i=1}^n G_i \cong G_1, G_2, \dots, G_n$

由定理 6.1 可知, 直积  $\prod_{i=1}^n G_i$  是它的子群  $G'_1, G'_2 \cdots G'_n$  的直和, 且  $G'_i \cong G_i$

所以在同构意义下直积  $\prod_{i=1}^n G_i$  可视为  $G_1, G_2, \dots, G_n$  的直和

反之, 若群  $G$  是其子群  $G_1, G_2, \dots, G_n$  的直和,

则由定理 6.2 可知, 在同构意义下直和  $G_1 G_2 \cdots G_n$  可视为  $G_1, G_2, \dots, G_n$  的直积

由于上述原因, 以后我们不再区分直积和直和

下面我们将以上结论应用于交换群,

**命题 6.4** 设  $G$  是交换群,  $G_1, G_2, \dots, G_n$  是  $G$  的子群,

$$\text{则 } \sum_{i=1}^n G_i = \bigoplus_{i=1}^n G_i \Leftrightarrow G_j \cap \sum_{i \neq j} G_i = \{0\}, 1 \leq j \leq n$$

**例 6.4** 设  $G$  是交换群,  $G_1, G_2, \dots, G_n$  是  $G$  的有限子群,

若  $G_i$  的阶彼此互素, 即  $(|G_i|, |G_j|) = 1$ , 试证明  $\left| \sum_{i=1}^n G_i \right| = |G_1| |G_2| \cdots |G_n|$

**证:** 对  $n$  用数学归纳法, 当  $n=2$  时,

对属于  $G_1 \cap G_2$  的任意  $x$ , 有  $x$  的阶是  $G_1, G_2$  阶的公因数,

因为  $(|G_1|, |G_2|) = 1$ , 所以  $x=0$ , 即  $G_1 + G_2 = G_1 \oplus G_2$ , 从而  $|G_1 + G_2| = |G_1| |G_2|$ ,

假设结论对  $n-1$  个子群成立,

令  $G' = G_1 + G_2 + \cdots + G_{n-1}$ , 则  $|G'| = |G_1| |G_2| \cdots |G_{n-1}|$  且  $(|G'|, |G_n|) = 1$ ,

由  $n=2$  时的证明可知  $|G' + G_n| = |G'| |G_n|$ ,

$$\text{从而 } \left| \sum_{i=1}^n G_i \right| = |G_1| |G_2| \cdots |G_n|$$

**例 6.5** 设  $G$  是有限交换群, 且  $|G|=p_1^{s_1}p_2^{s_2}\cdots p_n^{s_n}$ ,

其中  $s_i$  属于  $\mathbb{Z}^+$ ,  $p_i(i=1, 2, \dots, n)$  是互不相同的素数

若  $G$  有阶为  $p_i^{s_i}$  的子群  $G_i(i=1, 2, \dots, n)$ , 试证明  $G=\bigoplus_{i=1}^n G_i$

**证:** 由例 6.4 可知  $\left|\sum_{i=1}^n G_i\right| = |G_1||G_2|\cdots|G_n|$ , 即  $\left|\sum_{i=1}^n G_i\right| = |G|$

所以  $G = \prod_{i=1}^n G_i$ , 余下的我们只需考证  $G_j \cap \sum_{i \neq j} G_i = \{0\}, 1 \leq j \leq n$

令  $x$  属于  $G_j \cap \sum_{i \neq j} G_i$ , 并且  $x$  的阶为  $k$ , 则由例 6.4 得  $k|p_i^{s_i}, k \left| \prod_{i \neq j} p_i^{s_i} \right|$

但是  $(p_i^{s_i}, p_j^{s_j})=1, i \neq j$ , 所以  $k=1$ , 即  $x=0$ ,