1, 试证明交错群 A_4 有 1, 2, 3, 4 和 12 阶子群, 没有 6 阶子群,

解: A_4 的

1 阶子群为 $\{(1)\}$,

2 阶子群为 $\langle(12)(34)\rangle, \langle(13)(24)\rangle, \langle(14)(23)\rangle$;

3 阶子群为 $\langle(123)\rangle, \langle(124)\rangle, \langle(134)\rangle, \langle(234)\rangle$;

4 阶子群为 $\{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$,

12 阶子群为 A_4

若有 6 阶子群 H , 由[习题 2.5 题 6]知, 6 阶群有 3 阶子群, 所以含有 3 阶元素

若三个 2 阶元素都在 H 中, 则 H 有 4 阶子群, 矛盾,

所以至少有两个 3 阶元素, 设为 a, b , 满足 $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \{e\}$,

则 $H = \{e, a, a^2, b, ab, a^2b\}$,

显然, b^2 不属于 $\{e, a, a^2, b, ab, a^2b\}$, 矛盾, 所以没有 6 阶子群,

2, 写出 4 次对称群 S_4 的一个西罗 3-子群,

解: $|S_4| = 24 = 3 \times 2^2$, 从而 S_4 的西罗 3-子群为 3 阶的,

又因 (123) 为 S_4 的一个 3 阶元, 从而 $\langle(123)\rangle$ 即为 S_4 的一个西罗 3-子群,

3, 证明有限交换单群是素数阶的,

证明: 不妨设 G 为有限交换单群,

若 $p \mid |G|$, p 为素数, 则 G 含有 p 阶子群, 也是 G 的正规子群,

因为 G 是单群, 所以这个子群为 G , 即 $|G|$ 为素数,

4, 令 p, q 是互不相同的素数, 若 $p \nmid (q-1), q \nmid (p-1)$, 试证明 pq 阶群是循环群,

证明: 设 G 是 pq 阶群, 有西罗 p -子群和西罗 q -子群,

由已知条件可知 p, q 阶群都只有一个, 因而是 G 的正规子群,

设它们分别为 $\langle a \rangle$ 和 $\langle b \rangle$, 易知 $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \{e\}$, 从而 $aba^{-1}b^{-1}$ 属于 $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \{e\}$,

因此 $ab=ba$, 从而 ab 的阶为 pq , 所以 $G = \langle ab \rangle$ 是循环群,

5, 证明 85, 145 阶群是循环群,

证明: $85=5\times 17, 145=5\times 29$, 由上题得证,

6, 若 p, q 是互不相同的素数, 试证明 pq 阶群不是单群,

证明: 令 $|G|=pq$, 则存在 p, q 阶子群,

不妨设 $q < p$, 则 p 阶子群个数 k 满足 $k|q, k\equiv 1(\text{mod } p)$,

从而 $k=1$, 即 G 有 p 阶正规子群, 故 G 不是单群,

7, 证明 22, 40 阶群不是单群,

证明: $22=2\times 11, 2, 11$ 为不同素数, 故 22 阶群不是单群,

$40=2^3\times 5$, 所以 40 阶群 G 有 5 阶子群 K ,

K 的个数为 k 且 $k|8, k\equiv 1(\text{mod } 5)$, 则 $k=1$,

因此 K 为 G 的正规子群, 故 G 不是单群

8, 若 p, q 是互不相同的素数,

试证明 p^2q 阶群必含有 p^2 阶正规子群或 q 阶正规子群,

证明: 令 $|G|=p^2q$, 则存在 p^2 阶和 q 阶子群,

若 $q < p$, 则 p^2 阶子群只有 1 个, 这个 p^2 阶子群是正规子群,

若 $q > p$, 则 q 阶子群个数可能为 1 个或 p^2 个,

若 q 阶子群个数为 1 个, 则这个 q 阶子群是正规子群,

若 q 阶子群个数有 p^2 个,

则余下 $p^2q - [p^2q - (p^2 - 1)] = p^2 - 1$ 个元素与单位元 e 构成一个 p^2 阶子群,

因此 p^2 阶子群是正规子群,

9, 证明非交换的 6 阶群同构于对称群 S_3

解: 因为 $6=2 \times 3$, 所以 6 阶群有 3 阶元素 a , 2 阶元素 b ,

则 $G=\{e, a, a^2, b, ab, a^2b\}$,

因为这个群是非交换群, 所以 $ba \neq ab$, 只能有 $ba=a^2b$,

定义映射 φ , 满足 $\varphi(a)=(123)$, $\varphi(b)=(12)$, 则易知非交换的 6 阶群与 S_3 同构,

(若 6 阶群是交换的, 则有 2, 3 阶元素 a, b , 而 ab 阶为 6,

所以 6 阶交换群是循环群,

应用此题可以解决第 1 题: 非循环 6 阶群, 有三个 2 阶元, 两个 3 阶元,)

习题 1 写出 S_4 的三个西罗 2-子群和一个西罗 3-子群,

解: $|S_4|=2^2 \cdot 3$,

S_4 的

西罗 3-子群为 $\langle(123)\rangle, \langle(124)\rangle, \langle(134)\rangle, \langle(234)\rangle$,

西罗 2-子群为

$\{1, (13), (24), (12)(34), (13)(24), (14)(23), (1234), (1432)\}$,

$\{1, (12), (34), (12)(34), (13)(24), (14)(23), (1324), (1432)\}$,

$\{1, (14), (23), (13)(24), (14)(23), (12)(34), (1243), (1342)\}$,

习题 2 写出 4 次交错群 A_4 的一个西罗 2-子群和一个西罗 3-子群,

解: $|A_4|=12=3 \times 2^2$, 从而 A_4 的西罗 3-子群为 3 阶的,

又因 (123) 为 A_4 的一个 3 阶元, 从而 $\langle(123)\rangle$ 为 A_4 的一个西罗 3-子群,

西罗 2-子群是 4 阶子群,

因此西罗 2-子群为 $\{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$,

习题 3 设 G 是 pq 阶交换群, 其中 p, q 是互不相同的素数, 试证明 G 是循环群

证明: G 有 p, q 阶子群, 这两个子群为循环群,

设为 $H=\langle a \rangle, K=\langle b \rangle$, 则 ab 的阶为 pq , 所以 $G=\langle ab \rangle$ 是循环群,

习题 4 证明 15 阶群 G 最多含有一个 5 阶子群，

证明: $15=3\cdot 5$ ，而 $3\nmid 4, 5\nmid 2$ ，则根据[习题 2.8 题 4]可知 15 阶群是循环群，因此 5 阶子群唯一，

习题 5 设 G 是有限交换群，

试证明若 G 的每个元素的阶是素数 p 的方幂，则 G 是 p -群，

证明: 若存在不等于 p 的素数 q ，有 $q\mid |G|$ ，

则根据[第二章引理 8.1]知 G 有 q 阶元素，矛盾，

习题 6 设群 G 的阶为 pqr ，其中 p, q, r 是互不相同的素数，试证明 G 不是单群，

证明: 设 $p < q < r$ ，则 p, q, r 阶子群都存在，个数分别为 k_p, k_q, k_r ，则 $k_r \mid pq$ ，因此 $k_r=1$ 或者 $k_r=pq$ ，

当 $k_r=1$ 时， r 阶子群是正规子群， G 不是单群，

当 $k_r=pq$ 时，去掉 pq 个 r 阶子群的元素， G 中还剩下 pq 个元素，

$k_q \mid pr, k_q \equiv 1 \pmod{q}$ ，因此 $k_q=1$ 或者 $k_q=pr$ ，

当 $k_q=1$ 时， q 阶子群是正规子群， G 不是单群，

当 $k_q=pr$ 时，需要 $k_q=prq-pr+1$ 个元素构成 q 阶子群，

至少 $p-1$ 个元素构成 p 阶子群，

而 $(prq-pr+1)+(p-1)-pq=p(q-1)(1-r) < 0$ ，矛盾，