习题 1 设 A , B , C 都是集合 ，试证明 $C-(A\cap B)=(C-A)\cup(C-B)$,

注: 此题是证明两个集合相等 ，

而证明两个集合相等的基本手法是证明两个集合互相包含 ，

即对属于集合 $C-(A\cap B)$ 的任意 x，去证 x 属于集合 $(C-A)\cup(C-B)$;

反之 ，对属于集合 $(C-A)\cup(C-B)$ 的任意 x，去证 x 属于 $C-(A\cap B)$,

证明: 若 x 属于集合 $C-(A\cap B)$, 则 x 属于集合 C 且 x 不属于集合 $(A\cap B)$,

即 x 属于集合 C 且 x 不属于集合 A 或 x 不属于集合 B ,

从而 x 属于集合 $C-A$ 或 x 属于集合 $C-B$,

所以 x 属于集合 $(C-A)\cup(C-B)$,

若 x 属于集合 $(C-A)\cup(C-B)$, 则 x 属于集合 $C-A$ 或 x 属于集合 $C-B$,

从而 x 属于集合 C 且 x 不属于集合 A ,

或 x 属于集合 C 且 x 不属于集合 B , 则 x 属于集合 C 且 x 不属于集合 $(A\cap B)$,

所以 x 属于集合 $C-(A\cap B)$,

故 $C-(A\cap B)=(C-A)\cup(C-B)$

习题 2 判断下列规则是否是映射

(1) $\varphi: Q\to Q$, $\frac{m}{n}\to mn$, m , n 属于 N , $n\neq 0$;

(2) $\varphi: N\to N$, $m\to m-1$;

(3) $\varphi: Q\to R$, $x\to\frac{1}{x}$

解: 规则 $\varphi: A\to B$ 成为映射需要三个条件 ：

1)A 中每个元素有像 ；

2)A 中每个元素的像在 B 中 ；

3)A 中每个元素的像唯一

(1)不是映射 ，因为 $\frac{1}{1}=\frac{2}{2}$ 的像不唯一 ，

(2)不是映射 ，因为 $\varphi(0)=-1$ 不属于 N ,

(3)不是映射 ，因为 0 没有像 ,

习题 3 判新下列 R 到 R^+映射是否为单射、满射、双射

(1)$x\to 2^x+1$

(2)$x\to 2^x$

(3)当 $x\neq 0$ 时，$x\to x^2$，当 $x=0$ 时，$x\to 1$

(4)$x\to 1$，

解: (1)因为 1 没有原像，所以 $x\to 2^x+1$ 是单射，不是满射，

(2)$x\to 2^x$ 既是单射又是满射，因而是双射，

(3)0 和 1 的像相等，不是单射，但为满射，

(4)2 没有原像，1 和 2 的像又相等，所以 $x\to 1$ 不是单射也不是满射，

习题 4 设σ，τ，是集合 A 上的变换，证明:

(1)若σ，τ都是单变换，则$\sigma\tau$是单变换；

(2)若σ，τ都是满变换，则$\sigma\tau$是满变换；

(3)若σ，τ都是双变换，则$\sigma\tau$是双变换，

证明: (1)设$\sigma\tau(a)=\sigma\tau(b)$，因为$\sigma$是单变换，所以$\tau(a)=\tau(b)$，

又因为τ也是单变换，所以 $a=b$，即$\sigma\tau$是单变换，

(2)对属于集合 A 的任意 a，由σ是满变换知存在属于集合 A 的 b，使得$\sigma(b)=a$

对属于集合 A 的 b，因为τ是满变换，所以存在属于集合 A 的 c，使得$\tau(c)=b$

从而$\sigma\tau(c)=a$，因为 a 有原像，故$\sigma\tau$是满变换

(3)由(1)和(2)得证，

习题 5 设 A 是 n 元有限集合，σ是 A 的一个变换，

则σ是可逆变换$\Leftrightarrow\sigma$是单变换$\Leftrightarrow\sigma$是满变换，

证明: 若σ是单变换，则不同元素的像不同，共有 n 个像，

这 n 个像刚好构成集合 A，

因此σ是满变换，

若σ是满变换，则有 n 个不同的像，而不同原像的个数也是 n 个，

所以σ是单变换，

习题 6 设φ是 $A=\{1,2,3\}$到 A 的满射，且$\varphi(1)=2$，求φ的个数，

解: 因为有限集合上的满变换也是单变换，所以φ只有两种：

$\varphi: 1\to 2, 2\to 3, 3\to 1$

$\varphi: 1\to 2, 2\to 1, 3\to 3$

习题 7 设σ, σ'是 A 到 B 的映射，$\tau: B\to C$ 是单射，证明若$\sigma\tau=\tau\sigma'$，则$\sigma=\sigma'$

证明: 对属于集合 A 的任意 a，有$\tau\sigma(a)=\tau\sigma'(a)$，

因为τ是单射，所以$\sigma(a)=\sigma'(a)$，从而$\sigma=\sigma'$，

习题 8 设φ是 A 到 B 的映射，A_0 包含于 A，

试证明 A_0 包含于$\varphi^{-1}(\varphi(A_0))$，并举例说明等号不一定成立，

解: 对属于集合 A_0 的任意 a，$\varphi(a)$属于$\varphi(A_0)$，从而 a 属于$\varphi^{-1}(\varphi(A_0))$，

定义$\varphi: Z\to Z, n\to|n|$，则 Z^+包含于$\varphi^{-1}(\varphi(Z^+))$，但是 $Z^+\neq\varphi^{-1}(\varphi(Z^+))$，

习题 9 设φ是 A 到 B 的满射，B_0 包含于 B，证明$\varphi(\varphi^{-1}(B_0))=B_0$

证明: 若 b 属于$\varphi(\varphi^{-1}(B_0))$，

则存在属于集合$\varphi^{-1}(B_0)$的 a，使得 $b=\varphi(a)$属于 B_0, 即 b 属于 B_0

若 b 属于 B_0，则存在属于集合 A 的 a，使得 $b=\varphi(a)$属于 B_0

从而 a 属于$\varphi^{-1}(B_0)$，b 属于$\varphi(\varphi^{-1}(B_0))$

综上，$\varphi(\varphi^{-1}(B_0))=B_0$

习题 10 在 S_3 中，$\sigma=(123)$，$\varphi=(12)$，试计算$\sigma^2\varphi$，

解: 置换的乘法运算可用数表完成，例如我们可以用下表计算$\sigma\varphi$，

$$\sigma\varphi=\begin{pmatrix} & 1 & 2 & 3 \\ \varphi & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & 2 & 1 & 3 \\ \sigma & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}=(13)$$

当然，为了简洁我们也可以将箭头、映射符号省略不写，

$$\sigma^2\varphi=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}=23$$

习题 11 在 S_5 中，计算$\sigma\tau$，τ^2，$\sigma^{-1}\tau\sigma$，其中

$\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$，$\tau=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

解: $\sigma\tau=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}=(345)$

$$\tau^2=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}=(14)(25)$$

$$\sigma^{-1}\tau\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}=(2435)$$

习题 12 判断下列置换是否是偶置换：(1536)，(78249)，(1536)(78249)

关于奇偶置换的判别，我们可以遵从定义将置换表示成对换合成的形式，

再根据对换的个数确定置换的奇偶性，

另外，根据长度为 t 的轮换可以表示成 t–1 个对换的合成这个结论，

我们仅需将置换表示为轮换的合成就可以判断置换的奇偶性，

解: (1536)是长度为 4 的轮换，因此是奇置换；

(78249)是长度为 5 的轮换，因此是偶置换；

(1536)(78249)是偶置换与奇置换的合成，因此是奇置换，

习题 13 试证明在剩余类集合 Z_3 中，规则$\bar{a}\sim\bar{b}\Leftrightarrow|a|>|b|$不是 Z_3 的一个关系，

证明: 因为$|2|>|1|$，$|2|<|4|$，所以$\bar{2}\sim\bar{1}$，$\bar{2}\nsim\bar{4}$，

而在 Z_3 中，$\bar{1}=\bar{4}$，所以$\bar{2}\sim\bar{1}$，$\bar{2}\nsim\bar{1}$，

即规则$\bar{a}\sim\bar{b}\Leftrightarrow|a|>|b|$不是 Z_3 的一个关系，

习题 14 设 $A=\{a,b,c\}$，
试在 A 中给出一个关系，满足对称性和传递性，但不满足反身性，
解: 集合 A 的一个二元关系~决定 $A\times A$ 的一个子集 $S=\{(a,b)|a,b\in A,a\sim b\}$，
反之，$A\times A$ 的一个子集 S 决定 A 的一个二元关系~：$a\sim b\Leftrightarrow(a,b)$属于 S，
通过 $A\times A$ 的一个子集 $S=\{(a,b),(b,a),(a,a),(b,b)\}$可以给出满足条件的关系

习题 15 判断下列关系是否是等价关系：

(1)在 R 中，$x \sim y \Leftrightarrow |x| \geqslant |y|$；

(2)在 R 中，$x \sim y \Leftrightarrow xy \neq 0$；

(3)在 $M_n(R)$中，$A \sim B \Leftrightarrow del(A-B)=0$；

(4)在 R 中，$x \sim y \Leftrightarrow x > y$；

(5)在 $M_n(R)$中，$A \sim B \Leftrightarrow A^T=B$；

(6)在 R 中，$x \sim y \Leftrightarrow |x|+|y| > |x-y|$；

(7)在 R 中，$x \sim y \Leftrightarrow |x|+|y| \geqslant |x-yl$；

(8)在 Z 中，$m \sim n \Leftrightarrow m-n$ 是偶数，

解: 注意，(1)，(2)，(3)都仅满足等价关系的三个条件中的两条，

这说明等价关系的三个条件中的两个成立推不出第三个条件成立

(1)不是等价关系，满足反身性、传递性，但不满足对称性，

因为 2 和 1 有关系，但是 1 和 2 没关系

(2)不是等价关系，满足对称性、传递性，但不满足反身性，因为 0 和 0 没关系

(3)不是等价关系，满足反身性、对称性，但不满足传递性，

令 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，　$c=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，　则 $A \sim B$，$B \sim C$，$A \nsim C$，

(4)不是等价关系，不满足反身性、对称性，因为 $1 \nsim 1$，$2 \sim 1$，$1 \nsim 2$，

(5)不是等价关系，不满足反身性，因为 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq A^T$

(6)不是等价关系，不满足反身性，因为$|0|+|0|=0$，$0 \nsim 0$，

(7)是等价关系，

(8)是等价关系，

习题 16　A，B 属于 $M_n(R)$，判断下列关系是否是等价关系：

(1)$A \sim B \Leftrightarrow$存在可逆矩阵 P，Q 使得 $A=PBQ$；

(2)$A \sim B \Leftrightarrow$存在可逆矩阵 P 使得 $A=P^{-1}BP$；

(3)$A \sim B \Leftrightarrow$存在可逆矩阵 P 使得 $A=P^TBP$，

解: 以上三种关系分别是矩阵的相抵关系、相似关系和相合关系，

它们都是等价关系

习题 17 给出集合 $A=\{ax^2+bx+c=0|a,b,c\in R,a\neq 0\}$的一个分类，

解: 令 $b^2-4ac=\Delta$，

$A_1=\{ax^2+bx+c=0|\Delta>0\}$，

$A_2=\{ax^2+bx+c=0|\Delta=0\}$，

$A_3=\{ax^2+bx+c=0|\Delta<0\}$，

则$\{A_1,A_2,A_3\}$是 A 的一个分类，

习题 18 设 $H=\{(13),(14),(23)\}$，$K=\{(1),(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}$，

请说明 S_4 上的乘法运算是否是 H，K 上的乘法运算，

解: 因为(13)(14)=(143)不属于 H，即 S_4 的乘法运算在 H 上不封闭，

所以 S_4 上的乘法运算不是 H 上的乘法运算，

因为(1)a=a=a(1)，$a^2=(1)$，a 属于 K，

(12)(34)(13)(24)=(14)(23)，(12)(34)(14)(23)=(13)(24)，

(13)(24)(12)(34)=(14)(23)，(13)(24)(14)(23)=(12)(34)，

(14)(23)(12)(34)=(13)(24)，(14)(23)(13)(24)=(12)(34)，

即 S_4 的乘法运算在 K 上封闭，

所以 S_4 上的乘法运算不是 H 上的乘法运算，

习题 19 设属于集合 S_7 的σ是长度为 4 的轮换，

问 k 为何值时，σ^k 是轮换，并求轮换的长度

解: 不妨设σ=(1234)，则σ^2=(13)(24)，σ^3=(1432)，σ^4=(1)，

因此，k=4n 时，σ^k 是长度为 1 的轮换，k=4n±1 时，σ^k 是长度为 4 的轮换，

本题也说明轮换的合成不一定是轮换，

习题 20 判断下列运算$\circ$是否满足交换律、结合律：

(1)在 Z 中，$x\circ y=x+y-xy$；

(2)在 $M_n(R)$中，$A\circ B=AB-BA$；

(3)在 Z_n 中，$\overline{a}\circ\overline{b}=\overline{a-b}$；

(4)在 Z_n 中，$\overline{a}\circ\overline{b}=\overline{2(a+b)}$，

解: (1)两个运算规律都满足，

(2)两个运算规律都不满足，

(3)当 $n=2$ 时，两个运算规律都满足；当 $n\neq2$ 时，两个运算规律都不满足，

(4)当 $n=2$ 时，两个运算规律都满足；当 $n\neq2$ 时，满足交换律，不满足结合律

习题 21 设代数系统$\{A;\circ\}$有单位元 e 且运算满足结合律，

若对属于集合 A 的 a，b，是可逆元，证明$(a\circ b)^{-1}=b^{-1}\circ a^{-1}$，$(a^{-1})^{-1}=a$，

证明: 因为$(a\circ b)\circ(b^{-1}\circ a^{-1})=e=(b^{-1}\circ a^{-1})\circ(a\circ b)$，所以 $b^{-1}\circ a^{-1}$ 是 $a\circ b$ 的逆元，

因为 $a\circ a^{-1}=a^{-1}\circ a=e$，所以$(a^{-1})^{-1}=a$，

习题 22 求代数系统$\{Z_6;+\}$的每个元素的逆元，

解: $\overline{0}$是$\{Z_6;+\}$的单位元，

所以易知$\overline{0}$，$\overline{1}$，$\overline{2}$，$\overline{3}$，$\overline{4}$，$\overline{5}$的逆元依次为$\overline{0}$，$\overline{5}$，$\overline{4}$，$\overline{3}$，$\overline{2}$，$\overline{1}$，

习题 23 证明集合 $Z_5-\{\overline{0}\}$关于 Z_5 的乘法运算是代数系统，

并求其单位元及每个元素的逆元，

证明: 由于 Z_5 的乘法运算在子集合 $Z_5-\{\overline{0}\}$上封闭可知第一个结论成立，

单位元为$\overline{1}$，元素$\overline{1}$，$\overline{2}$，$\overline{3}$，$\overline{4}$的逆元依次为$\overline{1}$，$\overline{3}$，$\overline{2}$，$\overline{4}$，

习题 24 设φ是代数系统$\{A;\bullet\}$到$\{B;\circ\}$的满同态映射，e 是 A 的右单位元，试证明$\varphi(e)$是 B 的右单位元，

证明: 对属于集合 B 的任意 b，存在属于集合 A 的 a 使得$\varphi(a)=b$，

因为 $b\circ\varphi(e)=\varphi(a)\circ\varphi(e)=\varphi(a\bullet e)=\varphi(a)=b$，所以$\varphi(e)$是 B 的右单位元，

习题 25 设$\{M_n(R);\bullet\}$是实数域上 n 阶方阵关于矩阵乘法构成的代数系统，

$\{R;\bullet\}$是实数关于数的乘法构成的代数系统，，

试证明$\varphi: M_n(R)\to R$，$\varphi(A)=\det(A)$是$\{M_n(R);\bullet\}$到$\{R;\bullet\}$的满同态

证明: 因为 $\det(AB)=\det(A)\det(B)$，所以$\varphi(AB)=\varphi(A)\varphi(B)$，

对属于集合 R 的任意 a，

令 $A=\begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$，则 $\det(A)=a$，

即φ是$\{M_n(R);\bullet\}$到$\{R;\bullet\}$的满同态，

习题 26 试证明代数系统$\{Z;\bullet\}$和$\{M_n(R);\bullet\}$不同构，

证明: 两个代数系统同构，仅需要给出它们之间的一个同构映射，

而要证明不同构，必须指明它们之间没有同构映射，

这就需要证明任意映射都不是同构映射，要逐一验证是不可能的，

因此，论证不同构可以从下面两个方面考虑：

(1)通过看两个代数系统的运算律、特殊元素来判别，

例如$\{Z;\bullet\}$与$\{M_n(R);\bullet\}$，

因为$\{Z;\bullet\}$的运算满足交换律，$\{M_n(R);\bullet\}$的运算不满足交换律，

所以$\{Z;\bullet\}$与$\{M_n(R);\bullet\}$不同构，

再例如$\{Z;\bullet\}$与$\{2Z;\bullet\}$，

因为$\{Z;\bullet\}$有单位元，$\{2Z;\bullet\}$没有单位元，所以$\{Z;\bullet\}$与$\{2Z;\bullet\}$不同构

(2)利用反证法判别，

例如$\{R-\{0\};\bullet\}$与$\{R;+\}$，

假设$\{R-\{0\};\bullet\}$与$\{R;+\}$同构，则存在同构映射φ，使得$\varphi(1)=0$，

设$\varphi(-1)=a$，则$\varphi(1)=\varphi(-1)+\varphi(-1)=2a$，从而 $a=0$，矛盾，所以二者不同构

习题 27 证明 Z 的加法和乘法运算满足的运算律在 Z_n 中同样满足，

解: 我们可以直接验证 Z_n 的运算规律，

也可以通过给出$\{Z;+,\bullet\}$到$\{Z_n;+,\bullet\}$的满同态映射，

从而可知 Z 的运算规律在 Z_n 中都成立，

Z_n 是 Z 的一个分类方法，因此 Z 到 Z_n 有一个满射 $\varphi: Z\to Z_n, a\to\bar{a}$，

事实上，这个映射也是$\{Z;+,\bullet\}$到$\{Z_n;+,\bullet\}$的满同态映射，

因为$\varphi(a+b)=\overline{a+b}=\bar{a}+\bar{b}=\varphi(a)\varphi(b)$，$\varphi(ab)=\overline{ab}=\bar{a}\bar{b}=\varphi(a)\varphi(b)$，

所以 Z_n 的运算与 Z_n 的运算满足相同的运算律，

习题 28 试证明 $M_n(R)$上的运算 $A\circ B=AB-BA$ 不满足结合律，

称此运算为 $M_n(R)$上的李乘，

证明: 令 E_{ij} 表示 i, j 位置为 1，其余位置为 0 的 n 阶矩阵，

计算可知$(E_{11}\circ E_{12})\circ E_{21}=E_{11}-E_{22}$，$E_{11}\circ(E_{12}\circ E_{21})=O$

这说明此运算不满足结合律，

习题 29 试证明 $M_n(R)$上的李乘运算是反称矩阵集合上的运算，

但不是对称矩阵集合上的运算，

证明: 若 A, B 是反称矩阵或是对称矩阵，

则$(AB-BA)^T=B^TA^T-A^TB^T=BA-AB=-(AB-BA)$，即 $A\circ B$ 是反称矩阵，

从而 $M_n(R)$上的方括号运算是反称矩阵集合上的运算，

不是对称矩阵集合上的运算，

习题 30 试求 $A_n(n\geqslant 4)$中的乘积(123)(134)和(134)(123)，

解:

$$(123)(134)=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n\\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow\\ 3 & 2 & 4 & 1 & \cdots & n\\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow\\ 1 & 3 & 4 & 2 & \cdots & n\end{pmatrix}=(234)$$

$$(134)(123)=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n\\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow\\ 2 & 3 & 1 & 4 & \cdots & n\\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow\\ 2 & 4 & 3 & 1 & \cdots & n\end{pmatrix}=(124)$$

习题 31 令 R^*表示去掉 0 后的实数的子集合，

试证明映射 det: $GL_n(R)\to R^*$, $A\to \det(A)$是代数系统$\{GL_n(R);\bullet\}$到$\{R^*;\bullet\}$的满同态

证明: 因为 det(AB)=det(A)det(B)，所以 det 是同态，

对属于 R^*的任意 a，令 $A=\begin{pmatrix}a & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$，

则 det(A)=a，即 det 是$\{CL_n(R);\bullet\}$到$\{R^*;\bullet\}$的满同态，