

**定义 3.1** 设  $A$  是一个非空集合,  $\sim$  是  $A$  中两个元素之间的一个条件规则, 如果对  $A$  中任意两个元素  $a$  和  $b$ , 总能确定  $a$  和  $b$  是否满足条件规则  $\sim$ , 那么称  $\sim$  是  $A$  的二元关系, 简称关系, 特别地, 如果  $a$  和  $b$  满足条件规则  $\sim$ , 则称  $a$  和  $b$  有关系, 记为  $a \sim b$ , 否则, 称  $a$  和  $b$  没有关系, 记为  $a \not\sim b$ ,

**例 3.1** 在整数集合  $Z$  中, 可以定义关系:  $a \sim b \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{3}$ ,

在实数集合  $R$  中, 可以定义关系:  $a \sim b \Leftrightarrow ab \neq 0$ ,

在  $M_n(R)$  (实数域  $R$  上的  $n$  阶方阵集合) 中, 可以利用矩阵的秩定义关系:

$A \sim B \Leftrightarrow A$  与  $B$  秩相等 ( $\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$ ),

在  $M_n(R)$  中, 也可以利用行列式定义关系:  $A \sim B \Leftrightarrow \det(A) \geq \det(B)$

**定义 3.2** 设  $\sim$  是  $A$  的一个关系, 若它还满足以下条件:

(1) 反身性: 对属于  $A$  的任意  $a$ ,  $a \sim a$ ,

(2) 对称性: 对属于  $A$  的任意  $a, b$ , 如果  $a \sim b$ , 那么  $b \sim a$ ,

(3) 传递性: 对属于  $A$  的任意  $a, b, c$ , 如果  $a \sim b$  且  $b \sim c$ , 那么  $a \sim c$ ,

则称关系  $\sim$  是  $A$  的一个等价关系, 若  $a \sim b$ , 则称  $a$  与  $b$  等价,

若  $\sim$  是集合  $A$  的一个等价关系, 则对属于  $A$  的任意  $a$ , 有集合  $\bar{a} = \{b \in A | b \sim a\}$ ,

显然,  $a$  属于  $\bar{a}$ , 因此, 这是一个非空集合, 称  $\bar{a}$  是  $A$  的一个等价类,

$a$  称为这个等价类的代表元素

**例 3.2** 判断例 3.1 中的几个关系是否是等价关系，

**解:** 在整数集合  $\mathbb{Z}$  中，关系  $a \sim b \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{3}$  是等价关系，

等价类为  $\bar{0}$ ,  $\bar{1}$ ,  $\bar{2}$ ，注意，这里的  $\bar{0}$ ,  $\bar{1}$ ,  $\bar{2}$  与  $\mathbb{Z}_3$  中的三个元素分别相等，

在实数集合  $\mathbb{R}$  中，关系  $a \sim b \Leftrightarrow ab \neq 0$  不是等价关系，因为它不满足反身性，

在  $M_n(\mathbb{R})$  中，关系  $A \sim B \Leftrightarrow A$  与  $B$  秩相等是等价关系，

令  $N_i = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \text{rank}(A) = i\}$ ，则  $N_i (i=0, 1, \dots, n)$  是  $M_n(\mathbb{R})$  的所有等价类，

在  $M_n(\mathbb{R})$  中，关系  $A \sim B \Leftrightarrow \det(A) \geq \det(B)$  不是等价关系，因为它不满足对称性

若  $\sim$  是集合  $A$  的一个等价关系，则我们可以用  $A$  的所有等价类为元素，

构造出一个新的与  $A$  有关系的集合  $\Sigma = \{\bar{a} \mid a \in A\}$ ，

容易验证  $A$  的等价类具有如下性质：

(1) 对属于  $A$  的任意  $a, a \in \bar{a} \neq \emptyset$

(2) 对属于  $A$  的任意  $a, b, a \sim b \Leftrightarrow \bar{b} = \bar{a}$ ，

即等价类中的每个元素都可以作为该等价类的代表元素，

(3) 对属于  $A$  的任意  $a, b$ ，有  $\bar{b} \cap \bar{a} = \emptyset$  或  $\bar{b} = \bar{a}$

(4)  $A = \bigcup_{a \in A} \bar{a}$

(5) 在  $A$  和  $\Sigma$  之间存在满射  $\pi: A \rightarrow \Sigma, \pi(a) = \bar{a}, a \in A$ ，

一般地，我们称  $\pi$  为  $A$  到  $\Sigma$  的自然映射，

**定义 3.3** 设  $A$  是一个非空集合，

如果  $A$  的子集族(子集构成的集合) $\{A_i | A_i \subseteq A, i \in I\}$  满足下列条件

(1)  $A_i \neq \emptyset, i \in I$

(2)  $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$

(3)  $A = \bigcup_{i \in I} A_i$

则称集合 $\{A_i | i \in I\}$ 是  $A$  的一个分类，其中的每个子集  $A_i$  称为一个类，

实际上，集合的分类就是指将一个集合表示成非空的、互不相交的子集合的并，

**定理 3.1** 集合  $A$  的一个等价关系决定集合  $A$  的一个分类，

集合  $A$  的一个分类也决定  $A$  的一个等价关系，

**证:** 若令 $\sim$ 是  $A$  的等价关系，

则由等价类的性质  $a \in \bar{a} \neq \emptyset, \bar{b} \cap \bar{a} = \emptyset$ , 或  $\bar{b} = \bar{a}$ , 以及  $A = \bigcup_{i \in I} \bar{a}$

我们得到了集合  $A$  的与关系 $\sim$ 相关的一个分类 $\{\bar{a} | a \in A\}$ ,

若 $\{A_i | i \in I\}$ 是集合  $A$  的一个分类，

则可以在  $A$  上定义一个关系:  $a \sim b \Leftrightarrow a$  和  $b$  属于同一个类，

从而， $\sim$ 是  $A$  的一个等价关系，

事实上，(1)  $a$  与  $a$  在一个类中，即  $a \sim a$ ,

(2) 若  $a \sim b$ , 则  $a$  与  $b$  在一个类中，于是  $b$  与  $a$  在一个类中，即  $b \sim a$ ,

(3) 若  $a \sim b, b \sim c$ , 则  $a, b, c$  在一个类中，即  $a \sim c$ ,

因此，集合  $A$  的一个分类决定了  $A$  的一个等价关系，

而且由等价关系给出的等价类集合恰好就是分类 $\{A_i | i \in I\}$ ,

**例 3.3** 设集合  $A=\{a, b, c, d, e\}$ , 试给出  $A$  的一个等价关系,

**解:** 由定理 3.1 的证明易知, 只需给出  $A$  的一个分类即可,

为此, 我们可以把  $A$  分类为  $\{A_1, A_2\}$ , 其中  $A_1=\{a, b\}, A_2=\{c, d, e\}$ ,

然后规定关系:  $x \sim y \Leftrightarrow x$  和  $y$  属于同一个类,

那么这个关系就是一个等价关系,

**定理 3.2** 集合  $A$  到  $B$  的一个映射可以决定  $A$  的一个分类,

集合  $A$  的一个分类  $\{A_i | i \in I\}$  决定  $A$  到  $\{A_i | i \in I\}$  的一个映射,

**证:** 设  $\varphi$  是  $A$  到  $B$  的一个映射,

则可以定义  $A$  的一个关系:  $a_1 \sim a_2 \Leftrightarrow \varphi(a_1) = \varphi(a_2)$ ,

这是一个等价关系,

因此它决定了  $A$  的一个分类  $\{\bar{a} | a \in A\}$ , 其中  $\bar{a} = \{b \in A | \varphi(a) = \varphi(b)\}$ ,

若  $\{A_i | i \in I\}$  是  $A$  的一个分类, 则由定理 3.1 的证明知,

$A$  上的关系:  $(a \sim b \Leftrightarrow a$  和  $b$  属于同一个类) 是一个等价关系,

而且由该等价关系给出的等价类集合恰好就是分类, 即  $\{A_i | i \in I\} = \{\bar{a} | a \in A\}$ ,

由此, 映射  $\tau: A \rightarrow \{\bar{a} | a \in A\}, \tau(a) = \bar{a}$  即为所求,

**例 3.4** 设集合  $M=\{0, 1, \dots, n\}$ , 映射为  $\varphi: M_n(R) \rightarrow M, A \rightarrow \text{rank}(A)$ ,

求由映射  $\varphi$  决定的等价关系及分类,

**解:** 在  $M_n(R)$  中, 令  $\varphi$  决定的等价关系为  $A \sim B \Leftrightarrow \varphi(A) = \varphi(B)$ ,

并令  $N_i = \{A \in M_n(R) | \varphi(A) = i\}$ , 则  $\varphi$  决定的分类为  $\{N_0, N_1, \dots, N_n\}$ ,

**例 3.5** 试给出映射  $\varphi: Z_3 \times Z_3 \rightarrow Z_3, (\bar{a}, \bar{b}) \rightarrow \overline{ab}$  决定的  $Z_3 \times Z_3$  的分类

及此分类决定的  $Z_3 \times Z_3$  的等价关系，

**解:** 因为  $Z_3 \times Z_3$  的

元素  $(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{1}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{0})$  在映射  $\varphi$  下的像都等于  $\bar{0}$ ，

元素  $(\bar{1}, \bar{1}), (\bar{2}, \bar{2})$  在映射  $\varphi$  下的像都等于  $\bar{1}$ ，

元素  $(\bar{1}, \bar{2}), (\bar{2}, \bar{1})$  在映射  $\varphi$  下的像都等于  $\bar{2}$ ，

因此，若令

$$A_1 = (\bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{1}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{0}),$$

$$A_2 = \{(\bar{1}, \bar{1}), (\bar{2}, \bar{2})\}$$

$$\text{及 } A_3 = \{(\bar{1}, \bar{2}), (\bar{2}, \bar{1})\}$$

则映射  $\varphi$  决定的  $Z_3 \times Z_3$  的分类为  $\{A_1, A_2, A_3, \}$ ，

此分类决定的  $Z_3 \times Z_3$  的等价关系为

$$(\bar{a}, \bar{b}) \sim (\bar{c}, \bar{d}) \Leftrightarrow (\bar{a}, \bar{b}) \text{ 与 } (\bar{c}, \bar{d}) \text{ 属于同一个类，}$$