

1, 在 S_5 中, 令 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, 试计算 $\sigma^2\tau$,

解: $\sigma^2\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \text{id} = (1)$

2, 设置换 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 8 & 1 & 3 & 2 & 7 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

(1) 试将 σ 表示成不相交的轮换的合成,

(2) 试将 σ 表示成对换的合成,

(3) 试将 σ 表示成长度为 3 的轮换的合成

解: (1) $(143)(28675)$,

(2) $(14)(43)(28)(86)(67)(75)$,

(3) $(143)(286)(675)$

3, 在 S_n 中计算 $(123)(12)$ 和 $(12)(123)$, 其中 $(n \geq 3)$

解: $(123)(12) = (13)$, $(12)(123) = (23)$,

4, 试求 S_n 中恒等变换的符号函数, 其中 $(n > 1)$

解: S_n 中恒等置换为偶置换, 所以符号函数为 1, 其中 $(n > 1)$

5, 试将 S_4 中置换表示成对换合成的形式, 并给出 S_4 中偶置换构成的集合 A_4

解: 在 S_4 中有 $(1), (12), (13), (14), (23), (24), (34)$

$(12)(13), (12)(14), (12)(23), (12)(24), (13)(34), (14)(43), (23)(34),$

$(24)(43)$

$(12)(34), (13)(24), (14)(23)$

$(12)(23)(34), (12)(24)(43), (13)(32)(24)$

$(13)(34)(42), (14)(42)(23), (14)(43)(32)$

集合 A_4 的元素为

$(1), (123), (132), (124), (142), (134), (143), (234), (243)$

$(12)(34), (13)(24), (14)(23)$

6, 判断下列置换是否是偶置换:

$(1)(2367), (2)(15328), (3)(1327)(236),$

解: (1)奇置换, (2)偶置换, (3)奇置换,

7, 令 σ 属于 S_n , 试证明 σ^{-1} 与 σ 的奇偶性一致,

证明: 由于 $\sigma^{-1}\sigma=(1)$ 为偶置换, 从而必有 σ^{-1} 与 σ 的奇偶性一致

8, 令 $\sigma=(i_1 i_2 \cdots i_s)$ 属于 S_n , 即 σ 是长度为 s 的轮换, 试计算 σ^s ,

解: $\sigma^s=(1),$

9, 在 S_n 中, 令 $\sigma=(12)(34), \tau=(345), \delta=\sigma^{-1}\tau\sigma^{-1}$, 试证明 $\delta=\tau$,

证明: $\delta=\sigma^{-1}\tau\sigma^{-1}=(12)(34)(345)(12)(34)(354)=(345)=\tau,$