令 A 是含有 n 个元素的集合，$S_n=\{\sigma|\sigma$是 A 上的双射$\}$，

一般地，我们称 S_n 中的元素为 n 元置换，

令集合 $A=\{1,2,\cdots,n\}$，则属于 S_n 的任意置换σ均可以表示成如下形式：

$$\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

又由于σ是 A 上的双射，所以$\sigma(1),\sigma(2),\cdots,\sigma(n)$是 $1,2,\cdots,n$ 的一个全排列，

反之，对 $1,2,\cdots,n$ 的任意一个全排列 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 都能给出一个置换

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$$

并且对不同的全排列给出不同的置换，所以 S_n 含有 $n!$个元素，

特别地，当 n=1 时，S_n 只含有一个元素，即恒等变换 1，

在以下的讨论中，我们总假定 $n>1$

例 2.1 设$\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$，$\varphi=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$，$\tau=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，试计算σφ和φτσ

解: 我们先来求σφ，因为$\sigma\varphi(1)=\sigma(2)=3$，$\sigma\varphi(2)=\sigma(1)=2$，$\sigma\varphi(3)=\sigma(3)=1$，

因此，$\sigma\varphi=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

实际上，这个过程可以用下式表示: $\sigma\varphi=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \varphi \\ 2 & 1 & 3 & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \sigma \\ 3 & 2 & 1 & \end{pmatrix}$

类似地，我们可以求φτσ，如下式: $\varphi\tau\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \sigma \\ 2 & 3 & 1 & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \tau \\ 2 & 1 & 3 & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \varphi \\ 1 & 2 & 3 & \end{pmatrix}$

因此，$\varphi\tau\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}=id$

定义 2.1 设σ属于 S_n，若在集合$\{1,2,\cdots,n\}$中存在 t 个不同的数 $i_1,i_2,\cdots,i_t$，

使得$\sigma(i_1)=i_2,\sigma(i_2)=i_3,\cdots,\sigma(i_{i-1})=i_i,\sigma(i_t)=i_1$，

并且对于$\{i_1,i_2,\cdots,i_t\}$之外的 $n-t$ 个元素(如果存在的话)，

在σ的作用下都保持不变，即$\sigma(i)=i$，

则称σ是长度为 t 的轮换，记其为$\sigma=(i_1\, i_2\cdots i_t)$，

特别地，长度为 2 的轮换称为对换，

S_n中的恒等变换称为长度是 1 的轮换，记为(1)，

对于两个轮换$(i_1\, i_2\cdots i_t)$和$(j_1\, j_2\cdots j_s)$，

如果对属于$\{1,2,\cdots,t\}$的任意 k，和属于$\{1,2,\cdots,s\}$的任意 l，都有 $i_k\neq j_l$，

即$\{i_1\, i_2\cdots i_t\}\cap\{j_1\, j_2\cdots j_s\}=\varnothing$，则称这两个轮换是不相交的

显然，若$\sigma=(i_1\, i_2\cdots i_t)$和$\tau=(j_1\, j_2\cdots j_s)$是 S_n 中两个不相交的轮换，

则它们的合成是可交换的，即$(i_1\, i_2\cdots i_t)(j_1\, j_2\cdots j_s)=(j_1\, j_2\cdots j_s)(i_1\, i_2\cdots i_t)$，

例 2.2 判断置换$\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\\ 1 & 3 & 7 & 4 & 6 & 2 & 5\end{pmatrix}$是否是轮换，

解: 在集合$\{1,2,3,4,5,6,7\}$中有 5 个数 $2,3,7,5,6$

满足$\sigma(2)=3,\sigma(3)=7,\sigma(7)=5,\sigma(5)=6$和$\sigma(6)=2$，

而且对于余下的两个数 1 和 4 有$\sigma(1)=1,\sigma(4)=4$，

因此，根据定义 2.1，σ是长度为 5 的轮换，且$\sigma=(23756)$，

注意，在一般情况下，置换不一定是轮换，

例如，置换$\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1\end{pmatrix}$就不是轮换，

定理 2.1 每一个置换可以表示成不相交的轮换的合成

证: 设σ属于 S_n 且σ不等于(1)，

首先，取属于{1，2，⋯，n}的 i，并要求其满足$\sigma(i_1)$不等于 i_1

由于 i_1，$\sigma(i_1)$，$\sigma^2(i_1)$，⋯属于{1，2，⋯，n}，

故必存在关系 $t_1 < t_2$，使得$\sigma^{t_1}(i_1) = \sigma^{t_2}(i_2)$，即有$\sigma^{t_2-t_1}(i_1) = i_1$

若令 t 是满足$\sigma^{t}(i_1) = i_1$的最小正整数，那么从 i_i 的选取方法，我们可知 t>1

并且σ在$\{i_1, \sigma(i_1), \sigma^2(i_1), \cdots, \sigma^{t-1}(i_1)\}$上的限制构成一个轮换，

其次，如果$\{i_1, \sigma(i_1), \sigma^2(i_1), \cdots, \sigma^{t-1}(i_1)\}$之外的元素在$\sigma$作用下都保持不动，

那么$\sigma=(i_1\ \sigma(i_1)\sigma^2(i_1)\cdots\sigma^{t-1}(i_1))$，即$\sigma$是(单个)轮换的合成，

否则，

可以在$\{i_1, \sigma(i_1), \sigma^2(i_1), \cdots, \sigma^{t-1}(i_1)\}$之外选取一个在$\sigma$作用下变动的元素 i_2

然后，对 i_2 重复上述过程，则存在大于 1 的 s，

使得σ在$\{i_2, \sigma(i_2), \sigma^2(i_2), \cdots, \sigma^{s-1}(i_2)\}$上的限制构成一个轮换

如果$\{i_1, \sigma(i_1), \sigma^2(i_1), \cdots, \sigma^{t-1}(i_1)\} \cup \{i_2, \sigma(i_2), \sigma^2(i_2), \cdots, \sigma^{s-1}(i_2)\}$之外的元素在$\sigma$作用下都保持不动

那么$\sigma=(i_1\ \sigma(i_1)\sigma^2(i_1)\cdots\sigma^{t-1}(i_1))(i_2\sigma(i_2)\sigma^2(i_2)\cdots\sigma^{s-1}(i_2))$

且$(i_1\ \sigma(i_1)\sigma^2(i_1)\cdots\sigma^{t-1}(i_1))$与$(i_2\sigma(i_2)\sigma^2(i_2)\cdots\sigma^{s-1}(i_2))$互不相交

(注: 对属于 Z 的任意 k，l，$\sigma^k(i_2) \neq \sigma^l(i_1)$，否则导致 $i_2 = \sigma^{l-k}(i_1)$，

这与 i_2 的选取矛盾)

即σ可以表示成不相交的两个轮换的合成，

否则，再重复上面的讨论过程，由于 n 小于无穷大，

所以，我们一定可以在有限步之内完成上述讨论，即得到分解式的存在性，

例 2.3 试将 S_5 中的置换$\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\\ 1 & 7 & 2 & 6 & 5 & 4 & 3\end{pmatrix}$表示成不相交的轮换的合成

解: 因为$\sigma(2)$不等于 2 且$\sigma(2)=7$, $\sigma(7)=3$, $\sigma(3)=2$,

因此 , σ在集合$\{2 , 7 , 3\}$上的限制是轮换(273) ,

又因为 4 不属于$\{2 , 7 , 3\}$且$\sigma(4)=6$, $\sigma(6)=4$,

因此 , σ在集合$\{4 , 6\}$上的限制是轮换(46) ,

又因为 1 , 5 不属于并集$\{2 , 7 , 3\}\cup\{4 , 6\}$，且$\sigma(1)=1$, $\sigma(5)=5$,

所以 ，根据定理 2.1 知σ是不相交的两个轮换(273) 和(46)的合成 ，

即$\sigma=(273)(46)$,

例 2.4 试将 S_5 中的置换$\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1\end{pmatrix}$表示成不相交的轮换的合成

解: 因为$\sigma(1)$不等于 1 且$\sigma(1)= 2$, $\sigma(2)=5$, $\sigma(5)=1$,

因此 , σ在集合$\{1 , 2 , 5\}$上的限制是轮换(125) ,

又因为 3 不属于$\{1 , 2 , 5\}$且$\sigma(3)=4$, $\sigma(4)=3$,

因此 , σ在集合$\{3 , 4\}$上的限制是轮换(34) ,

另外$\{1 , 2 , 5\}\cup\{3 , 4\}=\{1 , 2 , 3 , 4 , 5\}$

所以 ，根据定理 2.1，我们知道σ是不相交的两个轮换(125)和(34)的合成 ，

即$\sigma=(125)(34)$,

例 2.5 易见，在 S_3 中，$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}=(12)$，$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}=(13)$和$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}=(23)$

是长度为 2 的轮换，

$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}=(123)$和$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}=(132)$是长度为 3 的轮换，

此外，容易验证, $(123)=(13)(12)$，$(132)=(12)(13)$，$(1)=(12)\,(12)$，

即对于 S_3 中的元素来说，每个置换都是轮换且可以用对换表示，

即 $S_3=\{(1), (12), (13), (23), (12)(13), (13)(12)\}$，

更一般地，关于轮换与对换的关系，我们有:

例 2.6 设$\sigma=(i_1 i_2 \cdots i_t)$是 S_n 中的一个轮换，则容易验证

$\sigma=(i_1 i_t)(i_1 i_{t-1})\cdots(i_1 i_3)(i_1 i_2)=(i_1 i_2)(i_2 i_3)\cdots(i_{t-2} i_{t-1})(i_{t-1} i_t)$，

即 S_n 中每个轮换都可以表示成对换合成的形式，

由此，再结合定理 2.1，我们可知每个置换可以表示成对换合成的形式，

但表达式不唯一，

例 2.7 试将置换$\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 6 & 1 & 4 & 5 & 3 & 2\end{pmatrix}$表示成对换合成的形式，

解: 我们先将置换表示成轮换合成的形式，然后将轮换表示成对换合成的形式

因为$\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 6 & 1 & 4 & 5 & 3 & 2\end{pmatrix}=(162)\,(345)$，

$(162) = (16)\,(62)$，$(345) = (34)\,(45)$

所以，$\sigma=(16)\,(62)(34)\,(45)$，

定理 2.2 若将置换表示成对换合成的形式，

则其表达式中出现的对换个数的奇偶性保持不变

证: 设σ属于 S_n , n 阶单位矩阵 $E=(e_1 , e_2 , \cdots , e_n)$,

其中 $e_i(i=1 , 2 , \cdots , n)$是 n 维单位列向量，

我们规定$\sigma(E)=\left(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, \cdots e_{\sigma(n)}\right)$

于是若$\sigma=\sigma_m\cdots\sigma_2\sigma_1$， 那么 $\det(\sigma(E))=(-1)^m\det E=(-1)^m$,

其中每个σ_i都是对换，

因此，若$\sigma=\sigma_m\cdots\sigma_2\sigma_1=\sigma'_k\cdots\sigma'_2\sigma'_1$，其中$\sigma_1\cdots\sigma_m$，$\sigma'_1,\cdots,\sigma'_k$都是对换，

那么有 $\det(\sigma(E))=(-1)^m=(-1)^k$，所以 m 与 k 的奇偶性相同，

定义 2.2 如果一个置换可写成偶数个对换合成的形式，

那么称其为偶置换，否则称其为奇置换，

显然，两个偶置换的合成是偶置换，两个奇置换的合成是偶置换，

偶置换(奇置换)与奇置换(偶置换)的合成是奇置换，

实际上，如果令属于 S_n 的$\sigma=\sigma_m\cdots\sigma_2\sigma_1$，其中每个$\sigma_i$都是对换，

那么可以将置换σ的符号函数定义为$\varepsilon(\sigma)=(-1)^m$，即$\varepsilon: S_n\to\{1 , -1\} , \sigma\to\varepsilon(\sigma)$,

当然，这样定义的ε确实是映射，

而且偶置换的符号函数为 1，奇置换的符号函数为-1 ,

例 2.8 设$\sigma=(i_1i_2\cdots i_t)$是 S_n 中的一个轮换，则由例 2.6 可知$\varepsilon(\sigma)=(-1)^{t-1}$,

这就是说，长度为偶数的轮换是奇置换，长度为奇数的轮换是偶置换

定理 2.3 若令 $A_n(n>1)$表示 S_n 中所有偶置换构成的集合，则$|A_n| = \frac{|S_n|}{2} = \frac{n!}{2}$

其中$|A_n|$, $|S_n|$分别表示集合 A_n , S_n 中所含元素的个数，

证: 因为 A_n 是 S_n 中偶置换构成的集合，所以 S_n-A_n 是 S_n 中奇置换构成的集合，

若这两个集合所含元素个数相等，则结论得证,

令φ: $A_n \to (S_n - A_n)$, $\sigma \to (12)\sigma$，则容易验证φ是双射，从而$|A_n|=|S_n-A_n|$,

命题 2.1 在 $S_n(n\geqslant 3)$中，

任意两个对换的合成可以表示成长度为 3 的轮换的合成，

任意偶置换可以写成长度为 3 的轮换的合成，

证: 设(ij)和(kl)是 $S_n(n\geqslant 3)$中两个对换，

若(ij)和(kl)不相交，则(ij)(kl)=(ij)(jk)(jk)(kl)= (ijk)(jkl) ,

若这两个对换相交，但不相同，

则不妨令它们的合成为(ij)(jk)，则(ij)(jk)=(ijk) ,

若这两个对换相同，则不妨令它们的合成为(ij)(ij) ,

因为 $n\geqslant 3$，所以存在关系 $t\neq i$, j，使得(ij)(ij)=(ij)(it) (it)(ij)=(itj)(ijt)

即任意两个对换的合成可以表示成长度为 3 的轮换的合成，

因此任意偶置换可以写成长度为 3 的轮换的合成

例 2.9 在 $S_n(n\geqslant 3)$中，

试将置换(1) , (12)(34) , (12)(23)表示成长度为 3 的轮换的合成，

解: (1)=(12) (12)= (132) (123) ,

(12) (34)=(123)(234) ,

(12) (23)=(123) ,