1，试写出集合 Z_4 中的所有元素

解: $Z_4=\{\bar{0}\ ,\ \bar{1}\ ,\ \bar{2}\ ,\ \bar{3}\}$

2，试写出集合 $Z_3\times Z_5$ 和 $Z_5\times Z_3$ 中的所有元素，并判断这两个集合是否相等，

解: $Z_3=\{\bar{0}\ ,\ \bar{1}\ ,\ \bar{2}\}$，$Z_5=\{\bar{0}\ ,\ \bar{1}\ ,\ \bar{2}\ ,\ \bar{3}\ ,\ \bar{4}\}$

$Z_3\times Z_5=\{(\bar{0}\ ,\ \bar{0}),(\bar{0}\ ,\ \bar{1}),(\bar{0}\ ,\ \bar{2}),(\bar{0}\ ,\ \bar{3}),(\bar{0}\ ,\ \bar{4}),(\bar{1}\ ,\ \bar{0}),(\bar{1}\ ,\ \bar{1}),$

$(\bar{1}\ ,\ \bar{2}),(\bar{1}\ ,\ \bar{3}),(\bar{1}\ ,\ \bar{4}),(\bar{2}\ ,\ \bar{0}),(\bar{2}\ ,\ \bar{1}),(\bar{2}\ ,\ \bar{2}),(\bar{2}\ ,\ \bar{3}),(\bar{2}\ ,\ \bar{4})\}$

$Z_5\times Z_3=\{(\bar{0}\ ,\ \bar{0}),(\bar{0}\ ,\ \bar{1}),(\bar{0}\ ,\ \bar{2}),(\bar{1}\ ,\ \bar{0}),(\bar{1}\ ,\ \bar{1}),(\bar{1}\ ,\ \bar{2}),(\bar{2}\ ,\ \bar{0}),$

$(\bar{2}\ ,\ \bar{1}),(\bar{2}\ ,\ \bar{2}),(\bar{3}\ ,\ \bar{0}),(\bar{3}\ ,\ \bar{1}),(\bar{3}\ ,\ \bar{2}),(\bar{4}\ ,\ \bar{0}),(\bar{4}\ ,\ \bar{1}),(\bar{4}\ ,\ \bar{2})\}$

这两个集合不相等，

3，设 a，b，c，d 都属于 Z，n 属于 Z^+，

若 $ac\equiv bd(\mathrm{mod}\ n)$，$c\equiv d(\mathrm{mod}\ n)$，且 c 与 n 互素，试证明 $a\equiv b(\mathrm{mod}\ n)$，

证明: 由于 $c\equiv d(\mathrm{mod}\ n)$，从而 $bc\equiv bd(\mathrm{mod}\ n)$，

又因 $ac\equiv bd(\mathrm{mod}\ n)$，因此 $ac\equiv bc(\mathrm{mod}\ n)$，

即 $n|ac-bc$，而 c 与 n 互素，故 $n|a-b$，即 $a\equiv b(\mathrm{mod}\ n)$，

4，设 A，B，C 都是集合，试证明 $C-(A\cup B)=(C-A)\cap(C-B)$，

证明: 若任意的 x 属于 $C-(A\cup B)$，则 x 属于 C 而不属于 $A\cup B$，

即 x 属于 C 而不属于 A，也不属于 B，

从而 x 属于 $C-A$ 且属于 $C-B$，所以 x 属于$(C-A)\cap(C-B)$，

若 x 属于$(C-A)\cap(C-B)$，则 x 属于 $C-A$ 且属于 $C-B$，

从而 x 属于 C 且不属于 A，也不属于 B，则 x 属于 C 且不属于 $A\cup B$，

所以任意的 x 属于 $C-(A\cup B)$，

5，对于 Z_3 的元素$\bar{0}$，$\bar{1}$，$\bar{2}$，我们有$\bar{0}\cap\bar{1}=\varnothing$，$\bar{0}\cap\bar{2}=\varnothing$，$\bar{1}\cap\bar{2}=\varnothing$，

并且$\bar{0}\cup\bar{1}\cup\bar{2}=Z$，试分析对于 Z_5 的元素是否也具有这样的性质

解: 有，

6，设 $A=\{1,2,3\}$，试构造一个 $A\times A$ 到 A 的满射，

并说明是否存在 $A\times A$ 到 A 的单射，

解: 易知$\varphi: A\times A\to A, (a,b)\to a$ 是一个 $A\times A$ 到 A 的满射，

不存在 $A\times A$ 到 A 的单射，因为 $A\times A$ 中元素个数比 A 中元素个数多

7，请分别讨论例 1.5 和例 1.6 中的映射是否是满射，是否是单射，

解: 都不是单射，但为满射

8，设φ是集合 A 到 B 的映射，证明φ是双射的充分必要条件是φ为可逆映射，

证明: 必要性，

因为φ是双射，所以对属于 B 的任意 b，存在属于 A 的唯一 a，使得 $b=\varphi(a)$，

因此，可以定义映射$\tau: B\to A, b\to a$，易知，$\varphi\tau=id_B, \tau\varphi=id_A$，

充分性，

因为φ是可逆映射，所以存在逆映射$\tau: B\to A$ 使得$\varphi\tau=id_B, \tau\varphi=id_A$，

对属于 B 的任意 b，有$\varphi\tau(b)=id_B(b)=b$，即 b 有原像，φ是满射，

若$\varphi(a_1)=\varphi(a_2)$，则 $a_1=\tau\varphi(a_1)=\tau\varphi(a_2)=a_2$，即$\varphi$是单射，

9，设 $M_n(R)$是实数域 R 上所有 n 阶方阵构成的集合，

$V_n(R)$是实数域 R 上的 n 维线性空间，试给出 $M_n(R)$到 $V_n(R)$的一个满射，

解: 设ε_1，⋯，ε_n是 $V_n(R)$的一组基，

则$M_n(R) \to V_n(R)$，$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}E_{ij} \to \sum_{i=1}^{n} a_{i1}\varepsilon_i$是$M_n(R)$到$V_n(R)$的一个满射

10，试证明$\phi:(Z_2 \times Z_3)\times(Z_2 \times Z_3)\to(Z_2 \times Z_3)$，

$((\bar{a}_1, \bar{b}_1),(\bar{a}_2, \bar{b}_2))\to(\overline{a_1a_2}, \overline{b_1+b_2})$是映射，

证明: 令$(\bar{a}_1, \bar{b}_1)=(\bar{c}_1, \bar{d}_1)$，$(\bar{a}_2, \bar{b}_2)=(\bar{c}_2, \bar{d}_2)$，

则$\overline{a_1a_2}=\overline{c_1c_2}$，$\overline{b_1+b_2}=\overline{d_1+d_2}$，得证，