

函数极限和极限值的定义：

当函数 $f(x)$ 的自变量 x 趋近于某个数 a 或 ∞ 时，其因变量趋近于一个常数 A ，则称这种变化趋势为函数极限，称常数 A 为函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 或 ∞ 处的极限值。

通常表示为： $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ ， $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$

其中数 a 不一定要在函数定义域内

函数极限也是一种运算，即求函数极限的过程叫函数的极限运算

如果函数 $f(x)$ 在 x 趋近于某个数 a 时，其因变量并不趋近于任何单一的常数，则称函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处没有极限值。

没有极限值的情况：

- 1、因变量在 $x=a$ 的左右两侧有不同的极限值
- 2、因变量振荡，没有明确的变化趋势。
- 3、因变量趋于无穷大

函数在某个趋近过程中，当极限值为 0 时，则称此函数的因变量为无穷小

设 $q(x)$ 和 $w(x)$ 是当 x 趋向 x_0 时的无穷小，且 $q(x) \neq 0$

如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{w(x)}{q(x)} = 0$ ，则称当 x 趋向 x_0 时， $w(x)$ 比 $q(x)$ 高阶的无穷小

记作 $w(x) = o(q(x))$

常用极限和极限值

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

利用常用函数极限的结果去求复杂函数极限，

这是一种求极限的基本且重要的方法。

在微积分中，我们经常遇到一些复杂的函数极限问题，直接求解可能非常困难或不可能。然而，如果我们能够将这些复杂函数通过代数变换、三角恒等式、等价无穷小替换、洛必达法则等方法，转化为包含已知极限的表达式，那么就可以利用这些已知极限来求解复杂函数的极限。

导数的定义

导数就是当函数自变量的改变量趋近 0 时，

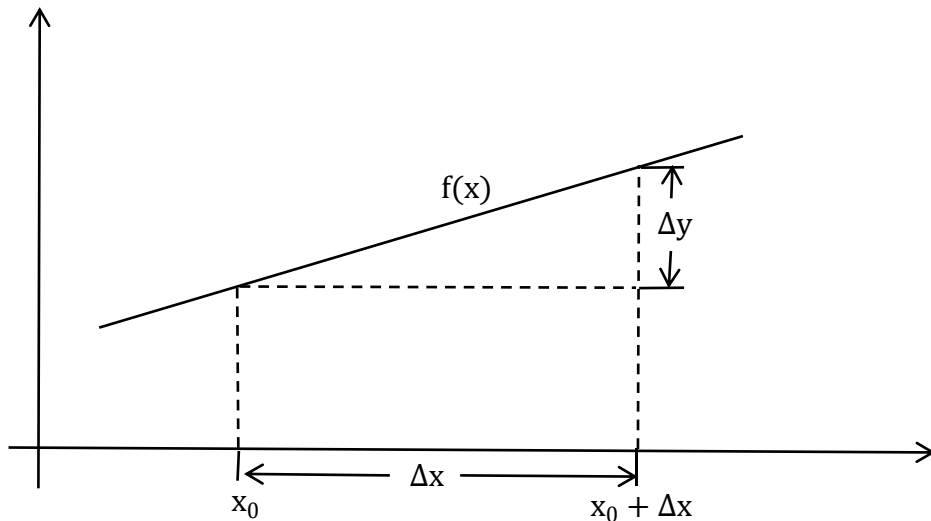
函数因变量的改变量与自变量的改变量的比值的极限值

$$\text{表达式为: } f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

函数在某 x 点的导数叫点导数，即 $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

函数在某 x 区间所有点导数都相等的集合导数叫区间导数，即 $f'(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

直线函数的导数：

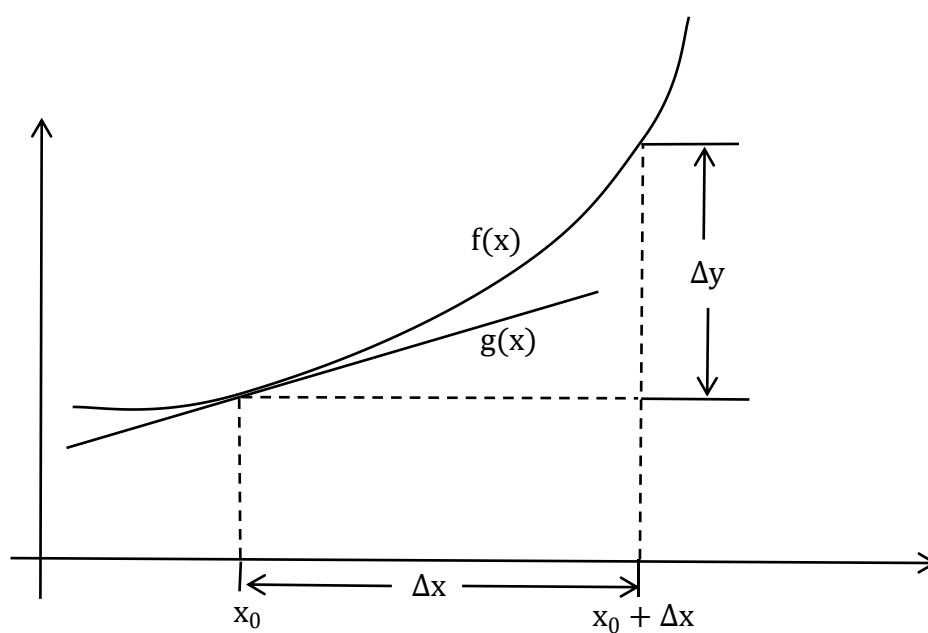


因为是直线函数，任意 x 点的导数为同一个值，即 $f'(x_0) = f'(x_1) = \dots = f'(x_k)$

所以点导数等于区间导数

$$\text{表达式为: } f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

曲线函数的导数：



因为是曲线函数，每个 x 点导数不相等，即 $f'(x_0) \neq f'(x_1) \neq \dots \neq f'(x_k)$

所以只有点导数，没有区间导数

$$\text{表达式为: } f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

微分定义：

微分就是函数因变量在某 x 点的微小增量

直线函数的微分

因为直线函数在任意 x 点的导数为同一个值

所以直线函数的微分就是直线函数的点导数与自变量的改变量的乘积

表达式为 $\Delta y = f'(x_0)\Delta x$

曲线函数的微分

因为曲线函数在每个 x 点的导数不相等

所以曲线函数的微分就是用

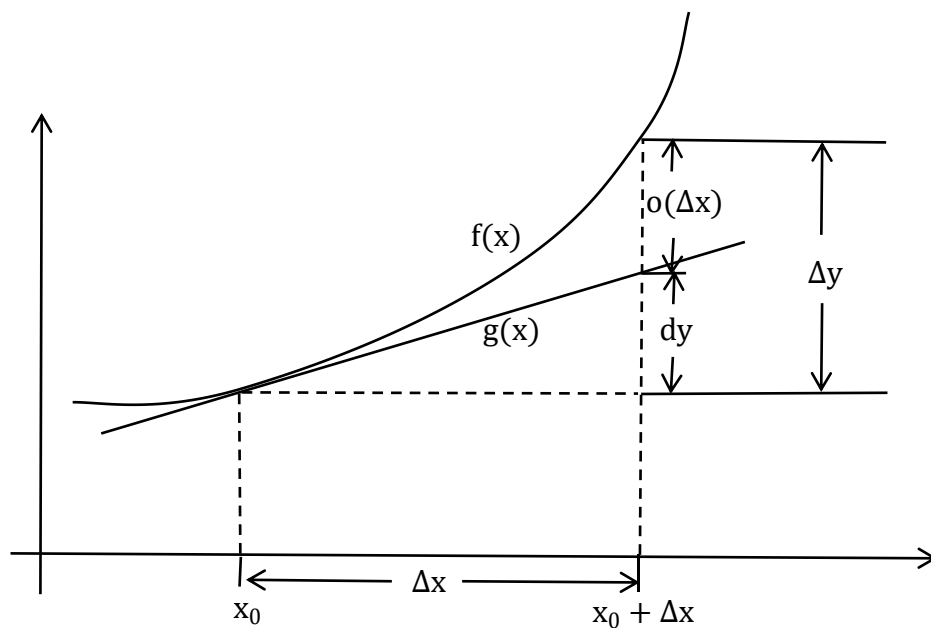
与曲线函数点导数相等的直线函数的点导数乘以自变量的改变量所得的积表示

表达式为 $\Delta y = dy + o(\Delta x) = dy + 0 = g'(x_0)\Delta x = f'(x_0)\Delta x$

其中 dy 是与曲线函数点导数相等的直线函数 $g(x)$ 的微分。

$o(\Delta x)$ 是当 Δx 趋向于 0 时比 Δx 高阶的无穷小，即 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = 0$

从而可以用 dy 代替 Δy 表示曲线函数的微分



因为直线函数是一种特殊的曲线函数，

所以直线函数的微分与曲线函数的微分用统一形式表达，即 $dy=f'(x_0)\Delta x$

因为自变量 x 也是一种函数，那么 x 的导数 $x'=1$ ， x 的微分 $dx=1\times\Delta x=\Delta x$

所以直线函数的微分与曲线函数的微分用统一形式表达，即 $dy=f'(x_0)dx$

定积分就是已知一个导函数，当原函数存在时

先求任一原函数，再求此原函数因变量在某 x 区间的增量