1，设 H={$\overline{0}$，$\overline{1}$，$\overline{2}$}是 Z_6 的子集合，试证明 Z_6 的乘法运算不是 H 的乘法运算

解: 因为$\overline{2}\,\overline{2}=\overline{4}$ 不属于 H，所以 Z_6 上的乘法运算不是 H 上的乘法运算，

2，设 $H=\left\{\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 2 & 3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 1 & 3\end{pmatrix}\right\}$，$K=\left\{\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 2 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 1 & 3\end{pmatrix}\right\}$，

试说明 S_3 的乘法运算是否是 H，K 的乘法运算，

解: 由于$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 2 & 3\end{pmatrix}=(1)$，$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 1 & 3\end{pmatrix}=(12)$，$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 2 & 1\end{pmatrix}=(13)$，

显然$(1)(1)=(1)$，$(12)(12)=(1)$，$(1)(12)=(12)$，

因此 S_3 上的乘法运算是 H 上的运算，

因为$(13)(13)=(1)$不属于 K，因此 S_3 上的乘法运算不是 K 上的运算，

3，试给出一个含 7 个元素，且具有两个运算的代数系统，

并且在这两个运算中的一个对另一个满足分配律

解: 代数系统$\{Z_7;+,\bullet\}$的乘法运算对加法运算满足分配律，

4，证明命题 4.1 和 4.2，

证明: 命题 4.2 的证明，对属于 A'的任意 a'，b'，c'，

由 f 为满射知存在属于 A 的 a，b，c 使得 f(a)=a'，f(b)=b'，f(c)=c'

(1)若ϕ满足结合律，

则$(a'\phi'b')\phi'c'=[f(a)\phi'f(b)]\phi'f(c)=f((a\phi b)\phi c)=f(a\phi(b\phi c))$

$=f(a)\phi'[f(b)\phi'f(c)]=a'\phi'(b'\phi'c')$，即$\phi'$满足结合律，

(2)若ϕ中满足交换律，

则 $a'\phi'b'=f(a)\phi'f(b)=f(a\phi b)=f(b\phi a)=f(b)\phi'f(a)=b'\phi'a'$，即$\phi'$满足交换律

(3)若ψ对ϕ满足分配律，由$(b\phi c)\psi a=(b\psi a)\phi(c\psi a)$，

得$[f(b)\phi'f(c)]\psi'f(a)=[f(b)\psi'f(a)]\phi'[f(c)\psi'f(a)]$，

即$(b'\phi'c')\psi'a'=(b'\psi'a')\phi'(c'\psi'a')$，

故ψ'对ϕ'满足右分配律，左分配律同理可证，

命题 4.1 根据命题 4.2 可直接得，

5，设 f 是代数系统$\{A;\varphi\}$到$\{B;\tau\}$的满同态，

若存在属于 A 的 e，使得对属于 A 的任意 a 有 $e\varphi a=a$，

则对属于 B 的任意 b 有 $f(e)\tau b=b$，

证明: 由于 f 为满射，因此对属于 B 的任意 b，存在属于 A 的 a，使得 $f(a)=b$，

又因 f 是$\{A;\varphi\}$到$\{B;\tau\}$的同态，且 $e\varphi a=a$，

从而有 $b=f(a)=f(e\varphi a)=f(e)\tau f(a)=f(e)\tau b$，

6，试说明代数系统$\{Z_2;\bullet\}$和$\{S_2;\bullet\}$是否同构，

解: 若$\varphi: Z_2\to S_2$是双射，则$\varphi(\overline{1})=(1)$，从而$\varphi(\overline{0})=(12)$，

而$\varphi(\overline{0}\,\overline{0})=(12)(12)=(1)$，矛盾，所以$\{Z_2;\bullet\}$和$\{S_2;\bullet\}$不同构，

7，证明代数系统$\{Q;+\}$和$\{Q^*;\bullet\}$不同构(Q^*表示非零有理数的集合)，

证明: 反证，若$\{Q;+\}$和$\{Q^*;\bullet\}$同构且φ是$\{Q;+\}$到$\{Q^*;\bullet\}$的同构映射，

则对属于 Q 的任意 a，有$\varphi(a)=\varphi(\frac{a}{2})\varphi(\frac{a}{2})=\varphi\left(\frac{a}{2}\right)^2>0$，这说明$\varphi$不是双射，