1，设 $A=\{a,b,c\}$，试在 A 中给出一个关系，使其

(1)满足反身性和对称性，但不满足传递性，

(2)满足对称性和传递性，但不满足反身性

解: (1)设映射 $\varphi: A \to Z$ 满足 $\varphi(a)=1, \varphi(b)=2, \varphi(c)=3$，

定义关系: $x \sim y \Leftrightarrow |\varphi(x)-\varphi(y)| \leqslant 1$，易知此关系满足要求，

(2)令 $S=\{(x,y) | x, y \in \{a,b\}\}$，

定义关系: $x \sim y \Leftrightarrow (x,y) \in S$，易知此关系满足要求，

2，若在有理数集合 Q 中，规定关系: $a \sim b \Leftrightarrow (a-b) \in Z$，

试证明~是 Q 的一个等价关系，

证明(1) $(a-a=0) \in Z$，即 $a \sim a$，

(2)若 $(a-b) \in Z$，则 $(b-a) \in Z$，即若 $a \sim b$，则 $b \sim a$，

(3)若 $(a-b) \in Z$ 且 $(b-c) \in Z$，则 $(a-c=a-b+b-c) \in Z$，即若 $a \sim b$，且 $b \sim c$，则 $a \sim c$，

3，试给出 n 阶实对称矩阵的一个分类和一个等价关系，

解: 对 n 阶实对称矩阵按照行列式分类为 $\{K_1, K_2, K_3\}$，

其中 $K_1=\{A \mid \det(A)>0\}, K_2=\{A \mid \det(A)<0\}, K_3=\{A \mid \det(A)=0\}$，

由上述分类决定的关系: $A \sim B \Leftrightarrow$ A 与 B 行列式同号或同时为零是等价关系

4，设 n 是一个正整数 ，若在 Z 中定义一个关系 $a \sim b \Leftrightarrow a \equiv b(\mathrm{mod}\ n)$，

试证明~是一个等价关系 ，并写出与此关系相应的等价类集合 ，

证明: (1) $a \equiv a(\mathrm{mod}\ n)$，即 $a \sim a$，

(2)若 $a \equiv b(\mathrm{mod}\ n)$，则 $b = a(\mathrm{mod}\ n)$，即若 $a \sim b$，则 $b \sim a$，

(3)若 $a \equiv b(\mathrm{mod}\ n)$且 $b \equiv c(\mathrm{mod}\ n)$，则 $a \equiv c(\mathrm{mod}\ n)$，即若 $a \sim b$ 且 $b \sim c$，则 $a \sim c$，

故~是一个等价关系 ，

等价类集合为$\{\overline{0}$ ，$\overline{1}$ ，$\overline{2}$ ，$\cdots$，$\overline{n-1}\}$，

5，设 A={a，b，c}，试写出 A 的所有不同的等价关系

解: 因为集合 A 的一个等价关系决定 A 的一个分类 ，

且 A 的一个分类决定 A 的一个等价关系 ，

我们写出 A 的所有分类 ，再根据关系: $a \sim b \Leftrightarrow$ a 与 b 在同一个类 ，

是等价关系即可以得出所有不同等价关系 ，

A 的所有不同分类方式为

{A}，{{a}，{b，c}}，{{b}，{a，c}}，{{c}，{a，b}}，{{a}，{b}，{c}}，

6，设φ是 A 到 B 的一个映射，映射φ决定的 A 的分类为 $\Sigma=\{\bar{a}|a\in A\}$，

其中$\bar{a}=\{b\in A\,|\varphi(a)=\varphi(b)\}$，

若π是 A 到 Σ 的自然映射，试证明

(1)存在一个单射$\tau:\Sigma\rightarrow B$，使得$\tau\pi=\varphi$，如下图，

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & B \\
\Sigma \arrow[ur, "\tau"'] &
\end{tikzcd}$$

(2)若φ是 A 到 B 的满射，则τ是Σ到 B 的一个双射

证明: (1)令$\tau:\Sigma\rightarrow B$，$\bar{a}\rightarrow\varphi(a)$，下面证明$\tau$是满足条件的一个映射，

若$\bar{a}=\bar{b}$，则 b 属于$\bar{a}$，$\varphi(a)=\varphi(b)$，从而τ是一个映射，

又若$\varphi(a)=\varphi(b)$，则 b 属于$\bar{a}$，从而$\bar{a}=\bar{b}$，因此τ是一个单射，

对属于 A 的任意 a 有$\varphi(a)=\tau(\bar{a})=\tau\pi(a)$，即$\tau\pi=\varphi$，

(2)若φ为满射，则对属于 B 的任意 b，存在属于 A 的 a，使得$\varphi(a)=b$，

而$\tau\pi(a)=\tau(\bar{a})=\varphi(a)$，从而$\pi(a)$为 b 在$\Sigma$中的原像，故$\tau$为满射，

7，试给出映射$\phi:Z_3\times Z_3\rightarrow Z_3$，$(\bar{a}，\bar{b})\rightarrow\overline{a+b}$决定的 $Z_3\times Z_3$ 的一个分类，

解: 按照规则: $(\bar{a}，\bar{b})$与$(\bar{c}，\bar{d})$在一类 $\Leftrightarrow\phi(\bar{a}，\bar{b})=\phi(\bar{c}，\bar{d})$

给出 $Z_3\times Z_3$ 的一个分类$\{A_1, A_2, A_3\}$

其中 $A_1=\{(\bar{0}，\bar{0}), (\bar{1}，\bar{2}), (\bar{2}，\bar{1})\}$，

$A_2=\{(\bar{0}，\bar{1}), (\bar{1}，\bar{0}), (\bar{2}，\bar{2})\}$，

$A_3=\{(\bar{0}, 2), (\bar{1}，\bar{1}), (\bar{2}，\bar{0})\}$，